

自然対数の底 e と複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して, e の複素数乗を次で定義する:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

このとき, 三角関数の加法定理

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

より, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1, x_2, y_1, y_2 は実数) に対して

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

よって複素数の指数に対しても指数法則が成り立つ.

$z = x + iy$ を 5 次方程式 $z^5 = 1$ の解とすると,

$$z^5 = e^{5x+i5y} = e^{5x} \cos 5y + ie^{5x} \sin 5y = 1$$

より,

$$e^{5x} \cos 5y = 1, \quad e^{5x} \sin 5y = 0$$

となる. これを満たす x, y は, $x = 0, y = 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$. よって解 z は

$$z = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$