

フーリエ級数

フーリエ級数は、関数に対して定義されるフーリエ係数を用いて次の形に表される三角級数である

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$f(x)$ が、実数 x を変数とする実数値連続関数で、周期 2π の周期関数とする。ここで、フーリエ係数を次のように定義する

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (n = 0, 1, \dots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n = 1, \dots)$$

このとき、 $f(x)$ は次のようにフーリエ級数を用いて表される

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

【例】 ($f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$))

この関数のフーリエ級数を計算すると

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となるので、 $f(x)$ のフーリエ級数は次のようになる

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

ここで、 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) であるので、 $x = \pi$ を上のフーリエ級数に代入すると

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

これより次の等式が得られる:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$