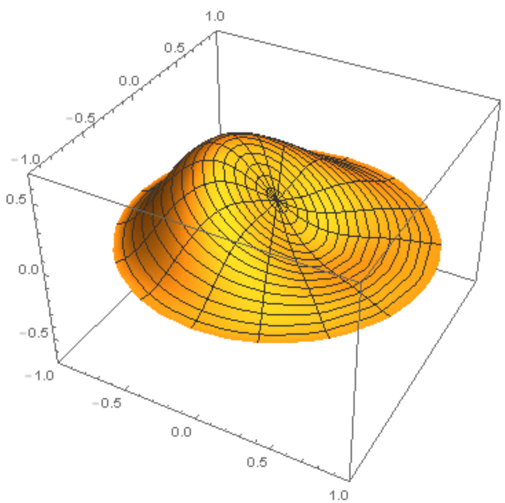
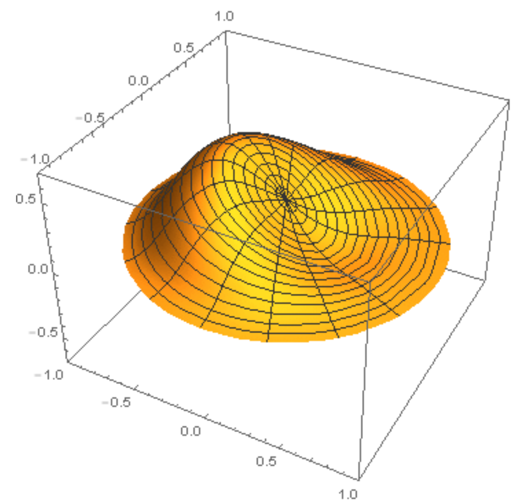
波を記述する方程式

廣澤史彦
理学部数理科学科

ギターの弦や太鼓の膜など、時間とともに振動しながら変化する物質の形は、波動方程式とよばれる微分方程式によって記述されます。この方程式を解くことによって、実際の現象を数式で表し解析することができるようになりますが、一般には微分方程式の「解」を求めることは容易ではありません。今回は、中学・高校・大学と学んできた数学が、このような問題の解決においてどう応用されているのかを紹介します。





1. 方程式

1元1次方程式「$2x=3$」の解法

$$2x=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 2x=\frac{1}{2}\times 3 \qquad \cdots \text{両辺に}\frac{1}{2}\text{を掛ける}$$

$$\Leftrightarrow 1x=\frac{3}{2} \qquad \cdots \frac{1}{2}\times 2=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \qquad \cdots 1x=1\times x=x$$

- $\frac{1}{2}$ は、2 に左から掛けると 1 になる数
- x に左から 1 を掛けても変わらない

2元1次方程式 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ の解法

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \quad 7y = 4 \end{cases}$$ ・・・ 2式＋(1式×2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$ ・・・ 1式ー(2式×$\frac{3}{7}$)

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

上記の解法はベクトルと行列を用いると次のように表される。

ベクトルと行列を用いた連立方程式

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

一般に

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b}$$

連立方程式:

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ 0x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は、本質的に単独(連立ではない)方程式である。

一般に、対角行列で表される連立方程式

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

は単独方程式とみなされ直ちに解が求められる。

連立方程式を解く	$\Longleftrightarrow$	対角化 (「線形代数」の一つのゴール)

2. 関数方程式と関数空間

f: 実数から実数への「関数」

$$\underset{(実数)}{x} \xrightarrow{\quad f \quad} \underset{(実数)}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

$x \in I$（定義域）　　　　$y \in H$（値域）

「関数」とは実数の部分集合 I の元 x から実数の部分集合 H の元 y への対応を定める規則である。

関数の例

- $f(x) = x^2$（x に x^2 を対応させる規則）
- $f(x) = \sin(x)$（角度 $x \in (0, \pi/2)$ に正弦を対応させる規則）
- $f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos(\pi\, n!\, x))^{2k}$
  （x が有理数ならば 1 , 無理数ならば 0 を対応させる規則）

関数方程式：等式で表された関数の性質

例
- $f(2x) = 2f(x)$
- $f(2x) = f(x)^2$
- $f'(x) = f(x)$
- $f''(x) + f(x) = 0$

$$\boxed{f(x+y) = f(x)f(y)}$$

関数方程式を「解く」（解を求める）とは？

- １次方程式 $2x = 3$ の解 x は $\mathbf{R}$（実数全体の集合）から求める。
- ２元１次方程式 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ の解 (x, y) は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ から求める。
- n 元一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{R}^n$ から求める。
- 関数方程式の解は定義域 I の非可算無限個の元 x に対して方程式を満たす規則（関数）を求める。

関数方程式の解を求める空間

$$\{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_k \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\}$$

（多項式で表される関数全体の集合）

$$\{f(x) \mid f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx) + \cdots\}$$

（$f(0) = f(\pi)$ を満たす三角級数全体の集合）

$$\left\{f(x) \mid f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-a)^n\right\}$$

（$x = a$ でローラン展開される関数全体の集合）

求める解（関数）の範囲を上記の空間に限定することによって、
加算個の係数 $\{a_n\}$ を求める問題に帰着する。

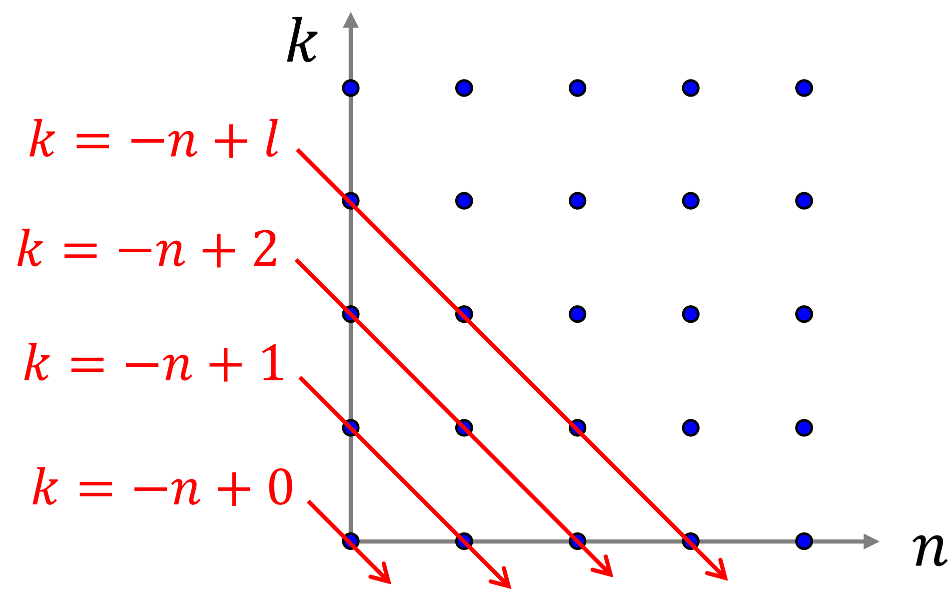
【問題】任意の実数 x, y に対して $f(x)f(y) = f(x+y)$ を満たすのはどんな関数か？

次の関数空間から解となる関数を探してみる。

$$\{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\}$$

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n\, a_k\, x^n\, y^k$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l} a_n\, a_{l-n}\, x^n\, y^{l-n}$$



$$f(x)f(y) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{l} \boxed{a_n\, a_{l-n}}\, x^n y^{l-n}\right)$$

$$f(x+y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (x+y)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{l} \boxed{a_l \binom{l}{n}}\, x^n\, y^{l-n}\right)$$

二項定理

$$a_n\, a_{l-n} = a_l \binom{l}{n} = a_l \frac{l!}{n!\,(l-n)!}$$

$$\frac{a_n\, a_{l-n}}{a_l} = \frac{l!}{n!\,(l-n)!} = \frac{\frac{1}{n!}\ \frac{1}{(l-n)!}}{\frac{1}{l!}} = \frac{\frac{p^n}{n!}\ \frac{p^{l-n}}{(l-n)!}}{\frac{p^l}{l!}}$$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}$$ （p は任意の実数）

$f(x)f(y) = f(x+y)$ を満たす関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $a_n = \frac{p^n}{n!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(px)^n}{n!} = e^{px} = (e^p)^x$$

$e^p = a$ と表すと

$$f(x) = a^x \text{（指数関数）}$$

【問題】$f'(x)=f(x)$ を満たすのはどんな関数か？

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とすると

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,x^n$$

$$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{(n+1)a_{n+1}}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{n\,a_n}\,x^n$$

$$(n+1)a_{n+1}=a_n\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$$

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}a_{n-2}=\cdots=\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}a_0=\frac{a_0}{n!}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}x^n=a_0\,e^x$$ （a_0 は任意の定数）

$a_n = (n+1)a_{n+1}$ を満たす a_n の求め方

$$a_0 = 1a_1,\ a_1 = 2a_2, a_2 = 3a_3, \cdots, a_n = (n+1)a_{n+1}, \cdots$$

$$\begin{cases} a_0 = 0a_0 + 1a_1 + 0a_2 + \cdots \\ a_1 = 0a_0 + 0a_1 + 2a_2 + 0a_3 + \cdots \\ a_2 = 0a_0 + 0a_1 + 0a_2 + 3a_3 + 0a_4 + \cdots \\ \quad \vdots \\ a_n = 0a_0 + \cdots + 0a_n + (n+1)a_{n+1} + 0a_{n+2} + \cdots \\ \quad \vdots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 2 & 0 & & & \\ & & 0 & 3 & 0 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & n+1 & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \iff P\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

多項式や冪級数(無限次の多項式)で表される関数空間は、関数方程式の解を捉えるのに十分に広い空間か？

定理(ワイエルシュトラスの多項式近似定理)

区間 $[a,b]$ 上で連続な関数は、多項式でいくらでも近似することができる。

定理(テイラーの定理)

関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間 $[a,b]$ で m 回連続的微分可能ならば、$f(x)$ は $[a,b]$ 上で次のような m 次多項式で近似される。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \delta_m(x)$$

ただし $\delta_m(x)$ は $\lim_{x\to 0}\delta(x) = 0$ を満たす関数である。

テイラーの定理は、近似する多項式の構成方法を与えている。
(微分可能性が高いほど精度の高い近似式が得られる。)

定理（ワイエルシュトラスの多項式近似定理）

区間 $[a, b]$ 上で連続な関数は、多項式でいくらでも近似することができる。

定理（テイラーの定理）

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \delta_m(x)$$

定理（フーリエ級数）

区間 $[0, \pi]$ 上の関数 $f(x)$ は、$f(0) = f(\pi) = 0$ ならば次のような三角級数で表される。

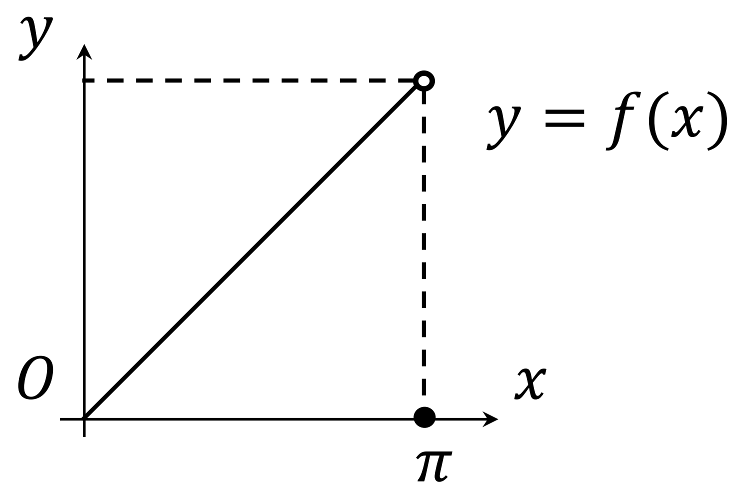
$$f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx) + \cdots$$

ただし係数 a_n は次で与えられる。

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$$

例

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx) + \cdots \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \end{gathered}}$$

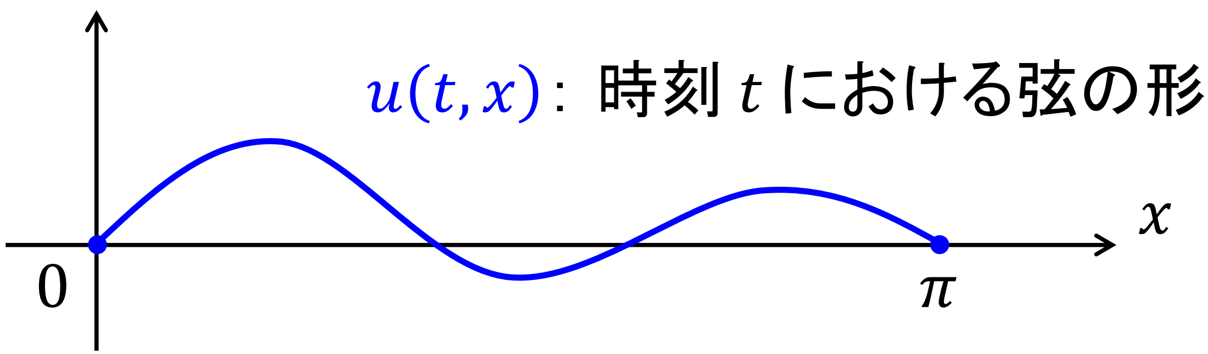
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \frac{2}{1} \sin(x) + \left(-\frac{2}{2}\right) \sin(2x) + \cdots + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) + \cdots$$

3. 波動方程式

両端 $x = 0, \pi$ で固定された張力 T , 線密度 ρ の弦の振動は波動方程式とよばれる次の偏微分方程式で表される。

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c^2\, \partial_x^2 u(t,x) \ \left(c = \sqrt{T/\rho}\right)}$$

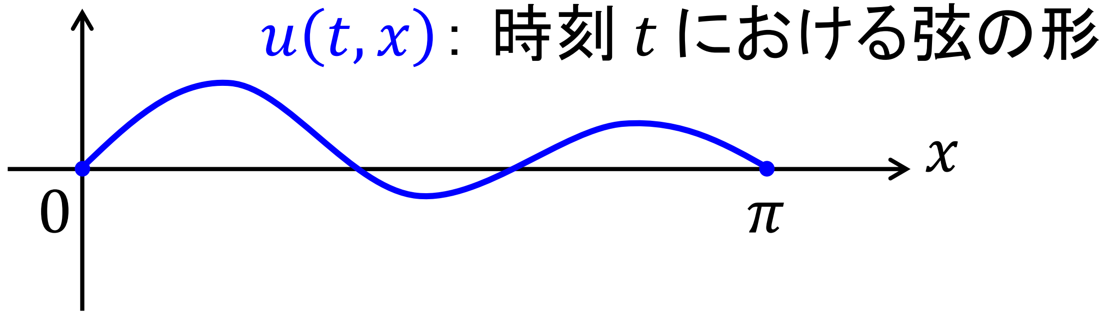


波動方程式の解を次の初期条件のもとで求める。

$u(0,x) = \phi(x)$（時刻 $t = 0$ における弦の形）

$\partial_t u(0,x) = 0$（時刻 $t = 0$ における弦の速度は 0 ）

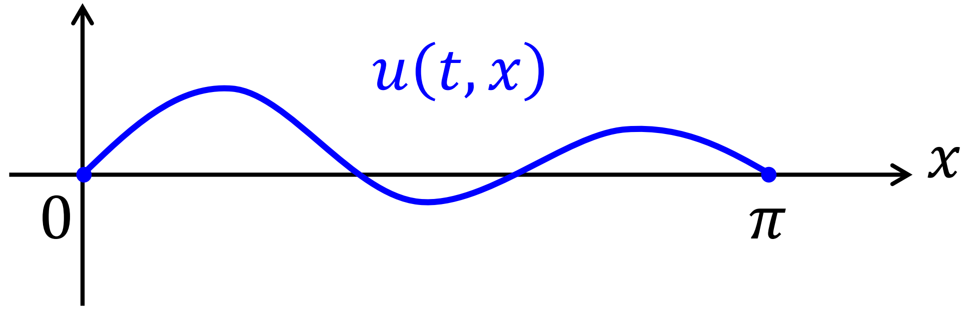
$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u}$$



1． $u(t,x)$ は、適当なフーリエ係数 $a_n = a_n(t)$ $(n = 1,2,\cdots)$ を用いて次のように表される。

$$u(t,x) = a_1(t)\sin(x) + a_2(t)\sin(2x) + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(nx)$$

$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u}$$



１．　$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx)$

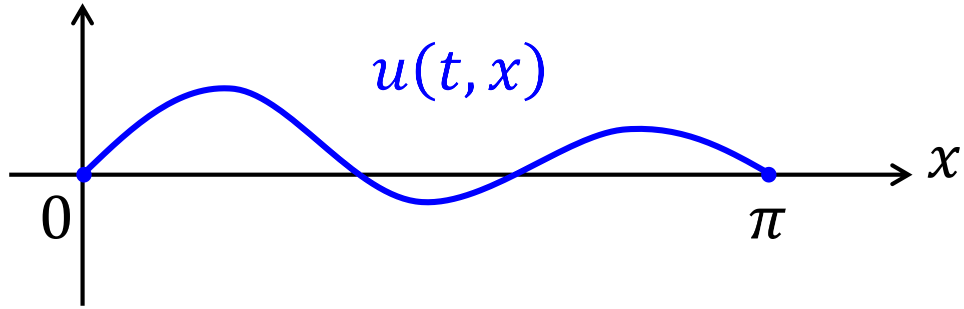
２．　$u(t,x)$ は初期条件

$$\partial_t u(0,x) = 0,\quad u(0,x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

を満たす。

$$\Longrightarrow a_n(0) = \alpha_n\,, a_n'(0) = 0$$

$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u}$$



１． $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx)$

２． $a_n(0) = \alpha_n$， $a_n'(0) = 0$

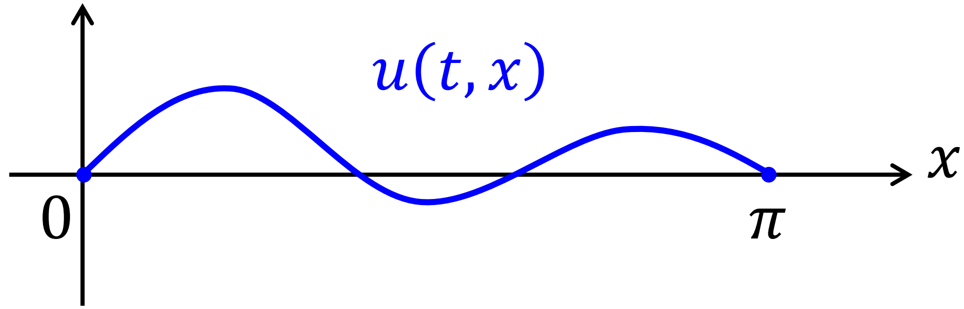
３． $u(t,x)$ は波動方程式の解である。

$$\partial_t^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t)\ \sin(nx)$$

$$\partial_x^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)(-n^2 \sin(nx))$$

$$\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u \ \Leftrightarrow\ a_n''(t) = -c^2 n^2 a_n(t)$$

$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u}$$



１． $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx)$

２． $a_n(0) = \alpha_n$， $a_n'(0) = 0$

３． $a_n''(t) = -(cn)^2 a_n(t)$

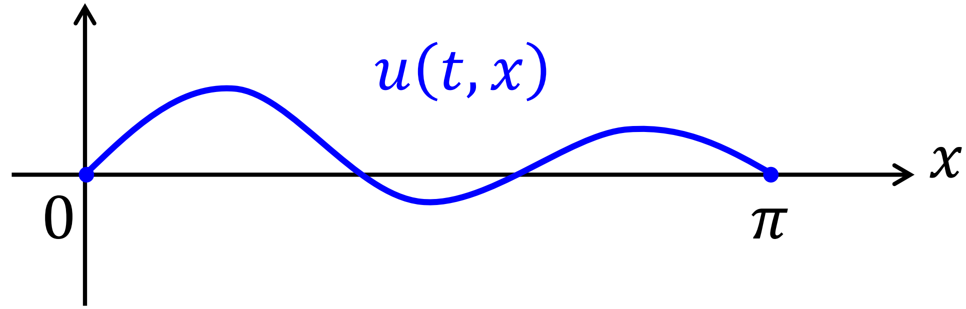
４． 常微分方程式 $a''(t) = -\nu^2 a(t)$ の、初期条件 $a(0) = \alpha$, $a'(0) = 0$ に対する解は次で与えられる。

$$a(t) = \alpha \cos(\nu t)$$

よって、$a_n(t)$ は次で与えらえる。

$$a_n(t) = \alpha_n \cos(cnt)$$

$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u}$$



1．　$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx)$

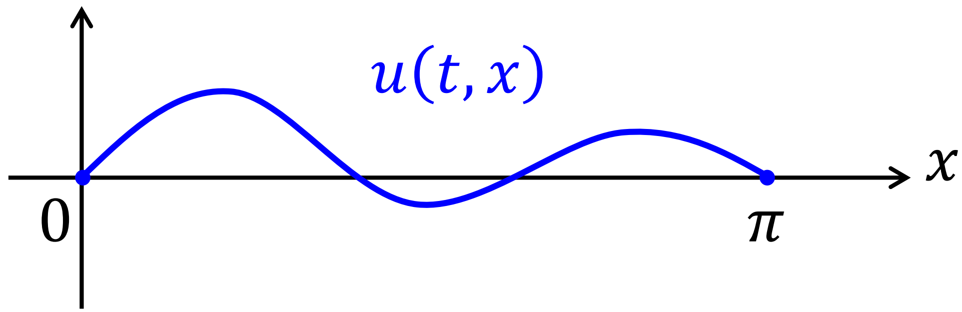
2．　$a_n(0) = \alpha_n$，$a_n'(0) = 0$

3．　$a_n''(t) = -(cn)^2 a_n(t)$

4．　$a_n(t) = \alpha_n \cos(cnt)$

5．　波動方程式の解は次で与えられる。

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(cnt) \sin(nx)$$



波動方程式の初期値境界値問題

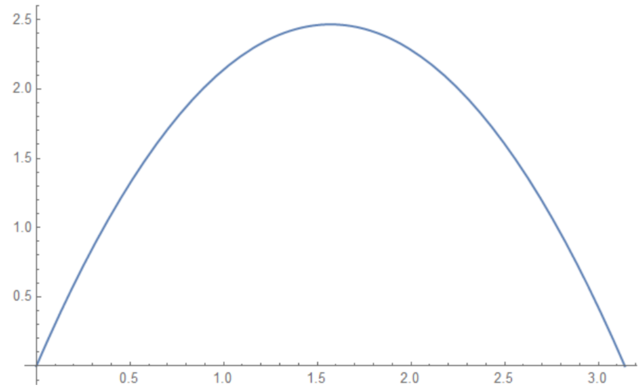
$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = c^2\, \partial_x^2 u(t,x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx),\ \partial_t u(0,x) = 0 \end{cases}$$

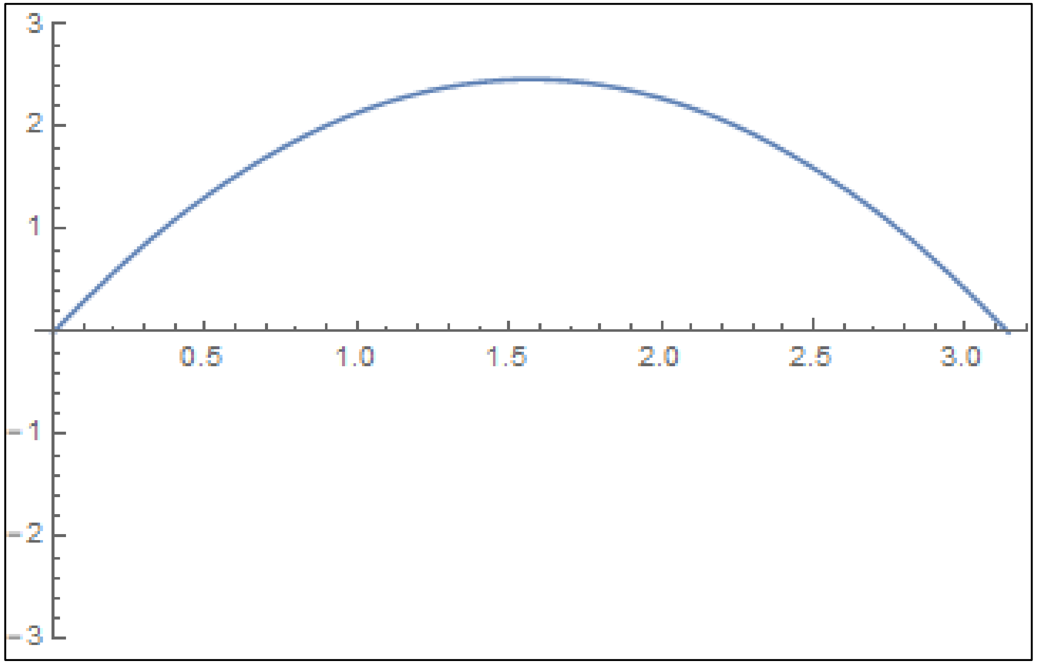
の解は次のように表される。

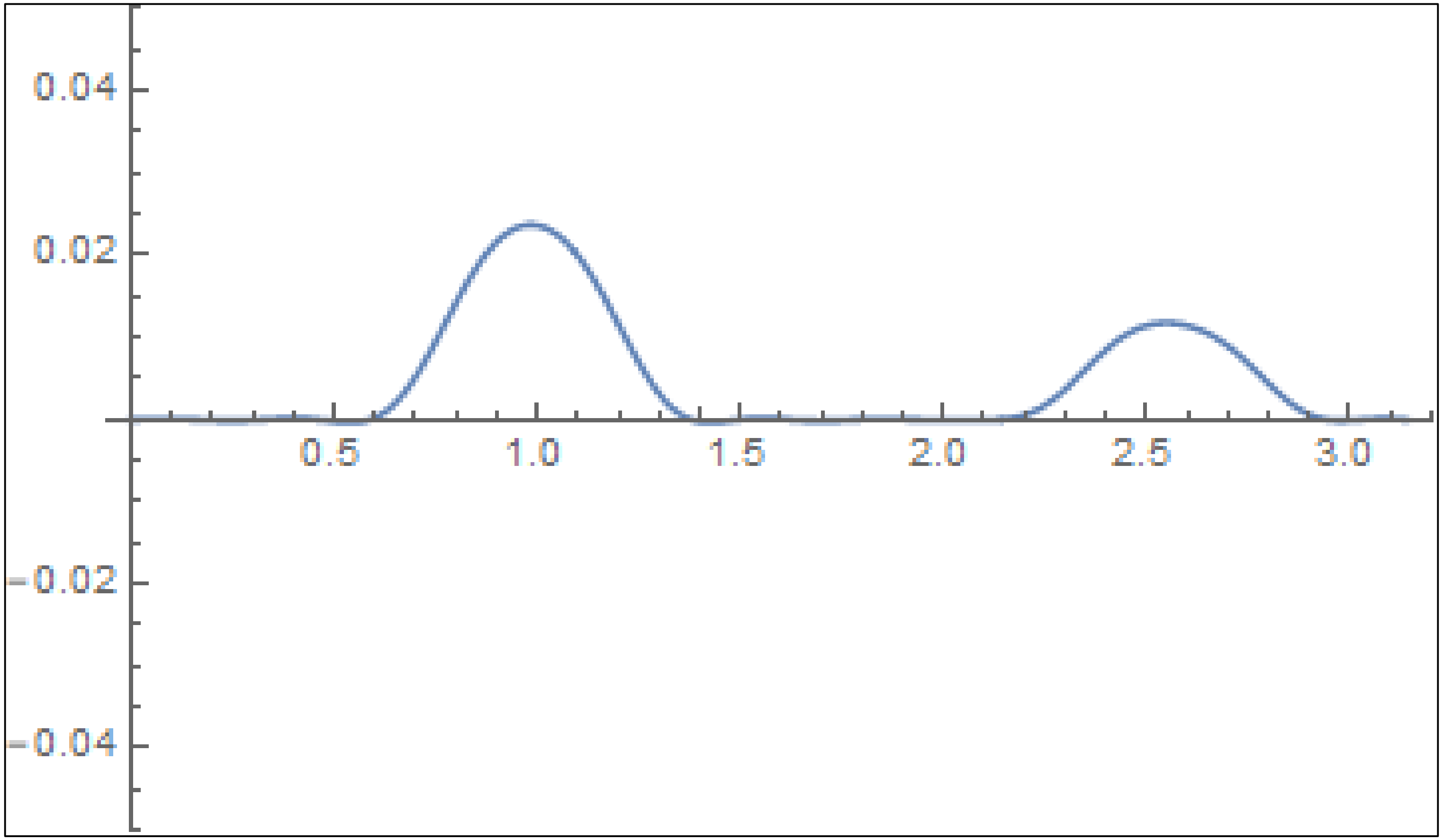
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(cnt) \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin(nx)\, dx \right) \cos(cnt) \sin(nx)$$

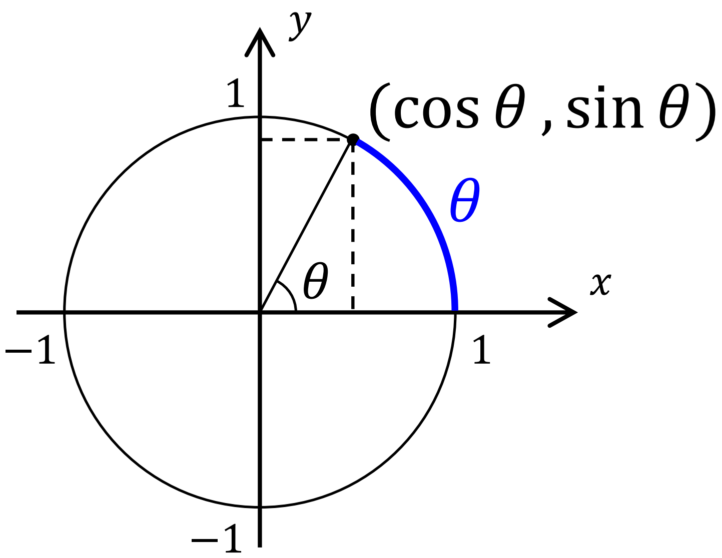
<u>例</u>　$\phi(x) = -x(x-\pi)$






0.04
0.02
-0.02
-0.04
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

Coffee break ～三角関数の定義～



$$\theta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \;=\cos^{-1}(x)$$

逆三角関数で三角関数を定義される！

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\Longrightarrow \cos(\theta)=2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2-1$$ （半角の公式）

$\cos(\theta)$ は、次の関数方程式の解として定義される。

$$2f\left(\frac{\theta}{2}\right)^2-f(\theta)-1=0$$

【注意】$\cos\theta$（例えば $\cos 45^\circ$ ）の値がわかれば、$x=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ の値は二次方程式

$$2x^2=\cos\theta+1$$

を解くことによって求められる。

一般に、小数第 n 位までの2進数 d_n に対して $\cos(d_n\theta)$ の値は 2^n 次方程式を解くことによって求められる。

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理(半角の公式)による定義

単振動の運動方程式(微分方程式)

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k\, f(x)$$

の解は次で与えられる。

$$f(x) = A\cos\left(\sqrt{k}\,(x+B)\right) \quad (A, B \text{ は任意の定数})$$

特に $k = 1$ 初期条件 $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ の解は $\cos(x)$ を定める。

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理(半角の公式)による定義
- 微分方程式の解としての定義

微分方程式の初期値問題

$$f''(x) + f(x) = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$$

の冪級数解(マクローリン展開)は次で与えられる。

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理（半角の公式）による定義
- 微分方程式の解としての定義
- 冪級数による定義

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

より、三角関数は指数関数で定義される。

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理(半角の公式)による定義
- 微分方程式の解としての定義
- 冪級数による定義
- 指数関数による定義

連続関数のフーリエ級数の性質:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx),\ \alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$\Longrightarrow \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ は基底関数

Coffee break ～三角関数の定義～

- 逆三角関数による定義
- 加法定理（半角の公式）による定義
- 微分方程式の解としての定義
- 冪級数による定義
- 指数関数による定義
- 基底関数としての定義

4. 波動方程式の解の性質

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u(t,x) = c^2\, \partial_x^2 u(t,x) \\
u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\
u(0,x) = \phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx), \quad \partial_t u(0,x) = 0
\end{cases}
$$

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(cnt) \sin(nx)
$$

$$
E(t) = \int_0^{\pi} \big(\partial_t u(t,x)\big)^2 dx + c^2 \int_0^{\pi} \big(\partial_x u(t,x)\big)^2 dx
$$

$= E(0)$ （エネルギー保存）

$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c^2\, \partial_x^2 u(t,x)\ ,\ u(0,x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)}$

$\boxed{E(t) = E(0)}$ （エネルギー保存）

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(cnt) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$$

$$e_n(t) = \int_0^{\pi} \left(\partial_t u_n(t,x)\right)^2 dx + c^2 \int_0^{\pi} \left(\partial_x u_n(t,x)\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\, c^2\, n^2\, \alpha_n^2 = e_n(0)$$

解の各周波数帯のエネルギーは保存される。

解のスペクトルエネルギー分布と微分可能性

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \implies |\phi(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \qquad (\mathrm{Ex.}\ \alpha_n = n^{-2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\alpha_n| < \infty \implies \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{d^k}{dx^k}\sin(nx)\right|$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\alpha_n| < \infty \qquad (\mathrm{Ex.}\ \alpha_n = n^{-k-2})$$

- 関数の微分可能性は高周波成分のエネルギーの減衰オーダーで規定される。
- 波動方程式の解の微分可能性は時間に関して保存される。

$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$

- $|\alpha_n| \le \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0) \Longrightarrow |\phi(x)| < \infty$ $\cdots$ $\phi(x)$ は有界な関数

- $|\alpha_n| \le \frac{1}{n^{k+\varepsilon}} \Longrightarrow \left|\phi^{(j)}(x)\right| < \infty$ $(j = 0,1, \ldots, k)$

  $\cdots$ $\phi(x)$ は k 回微分可能な関数

- $|\alpha_n| \le \frac{1}{R^n}$ $(R > 1) \Longrightarrow \left|\phi^{(j)}(x)\right| < \infty$ $(j = 0,1, \ldots)$

  $\cdots$ $\phi(x)$ は無限回微分可能な関数

- $|\alpha_n| \le \frac{1}{n!} \Longrightarrow \left|\phi^{(j)}(x)\right| \le \rho^{-j} j\,!$ $(\rho > 0,\ j = 1,2, \ldots)$

  $\cdots$ $\phi(x)$ は実解析関数

- $|\alpha_n| \le \frac{1}{n!^{1/\nu}} \Longrightarrow \left|\phi^{(j)}(x)\right| \le \rho^{-j} (j\,!)^{\nu}$ $(\nu > 1,\ j = 1,2, \ldots)$

  $\cdots$ $\phi(x)$ は位数 ν のジェブレイ級関数

熱方程式の初期値境界値問題

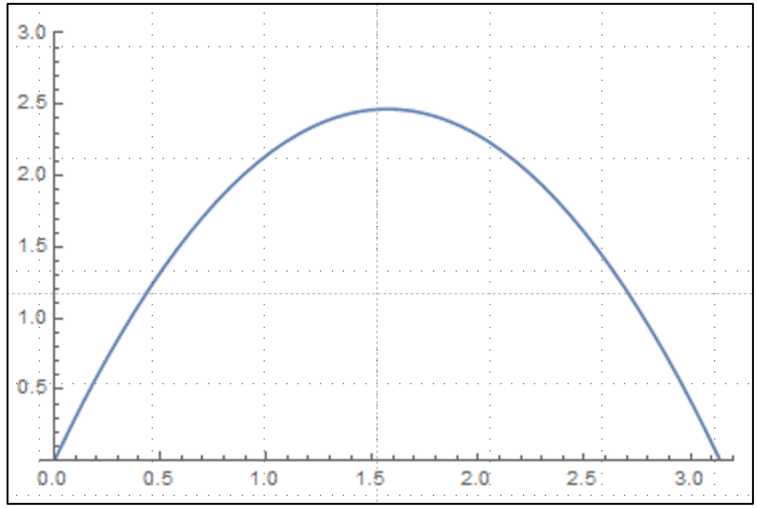
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = c^2\, \partial_x^2 u(t,x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{（境界条件）} \\ u(0,x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) \quad \text{（初期条件）} \end{cases}$$

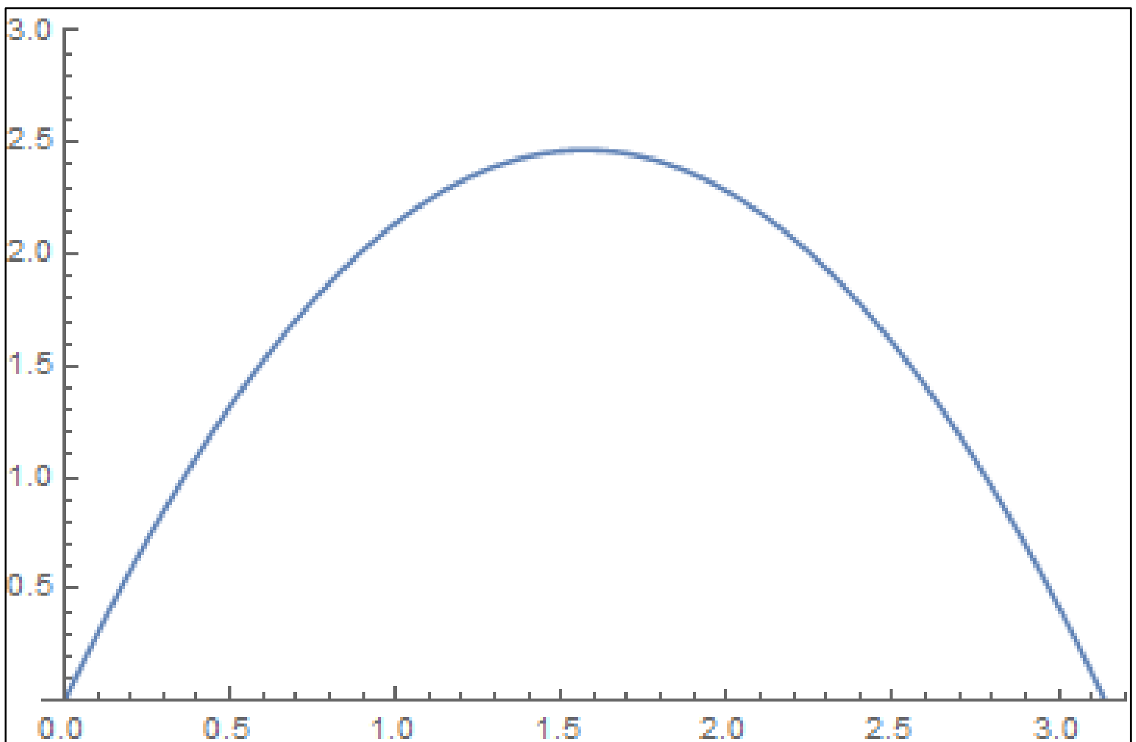
解と各周波数のエネルギーは次で与えられる。

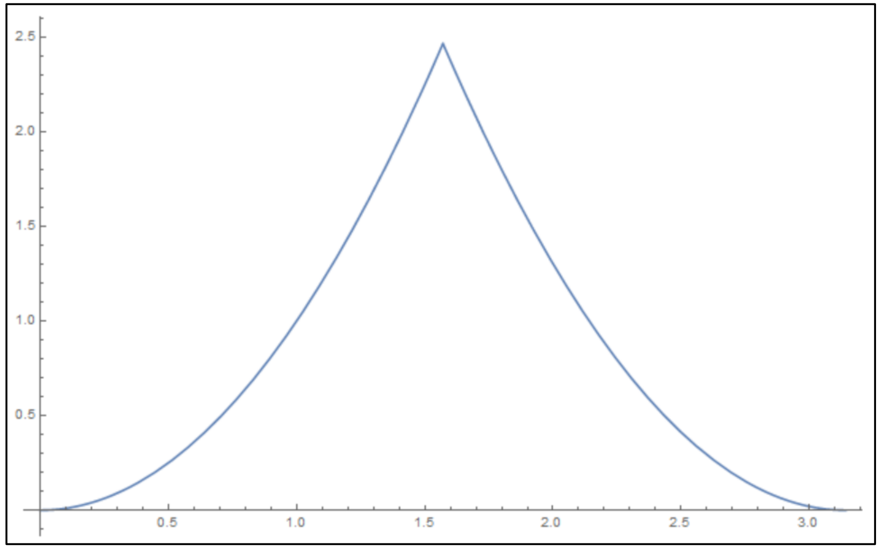
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp(-c^2 n^2 t) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$$

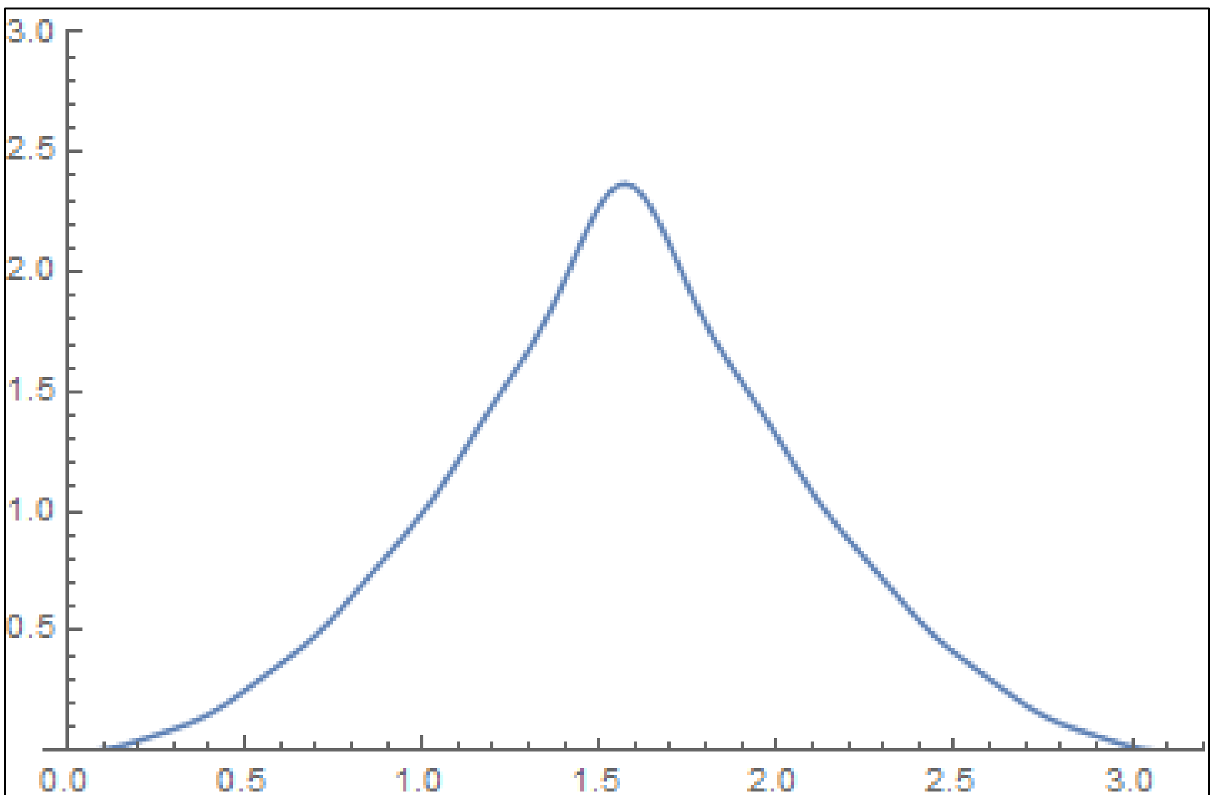
$$\mathcal{E}_n(t) = \int_0^{\infty} |u_n(t,x)|^2\, dx = \frac{\pi}{2} {\alpha_n}^2 \exp(-2c^2 n^2 t)$$

- 解のエネルギーは保存されない。
- 高周波のエネルギーが速く減衰する。
- 初期値の微分可能性は保存されない。
（不連続な初期値を与えても、解は一瞬で x に関して無限回微分可能になる）


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

5．非線形波動方程式･変数係数波動方程式

ゴム紐のような伸縮する弦の振動を記述するキルヒホフ方程式と呼ばれる次のような非線形波動方程式を考える。

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c(t)^2\,\partial_x^2 u(t,x),\quad c(t) = 1 + \frac{\delta}{2}\int_0^{\pi} \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx}$$

$$弦の張力 = T + k\Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(\partial_x u(t,x)\right)^2}\,dx}_{伸びた弦の長さ} - \underbrace{\pi}_{自然長}\Bigg)$$

$$\approx T + k\left(\int_0^{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\left(\partial_x u(t,x)\right)^2\right)dx - \pi\right)$$

$$\approx T + \frac{k}{2}\int_0^{\pi}\left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx$$

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c(t)^2\, \partial_x^2 u(t,x), \quad c(t) = 1 + \frac{\delta}{2}\int_0^\pi \big(\partial_x u(t,x)\big)^2 dx}$$

解のエネルギー $E_K(t)$ を次のように定義する。

$$E_K(t) = \int_0^\pi \big(\partial_t u(t,x)\big)^2 dx + \int_0^\pi \big(\partial_x u(t,x)\big)^2 dx + \left(\delta \int_0^\pi \big(\partial_x u(t,x)\big)^2 dx\right)^2$$

このとき、次が成り立つ。

$$E_K'(t) = 0 \;\Rightarrow\; E_K(t) = E_K(0) \quad \text{（エネルギー保存）}$$

形式的には（解が存在するという仮定のもとで）エネルギー保存は成り立つが、肝心の解が存在するか否かは明らかでない。

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c(t)^2\, \partial_x^2 u(t,x), \quad c(t) = 1 + \frac{\delta}{2}\int_0^\pi \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx}$$

$$E_K(t) = \int_0^\pi \left(\partial_t u(t,x)\right)^2 dx + \int_0^\pi \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx + \left(\delta \int_0^\pi \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx\right)^2$$

実際、$E_K'(t)$ の計算において

$$\int_0^\pi \partial_x^2 u(t,x)\, \partial_t u(t,x)\, dx$$

が収束しなければ、$E_K'(t) = 0$ は無意味である。

- 初期値 $\phi(x)$ が2回微分可能ならば時間局所解が存在する。
- 初期値 $\phi(x)$ が実解析関数ならば時間大域解が存在する。

非線形波動方程式（キルヒホフ方程式）の線形化

$$\partial_t^2 u(t,x) - c(t)^2\, \partial_x^2 u(t,x) = 0$$ （変数係数波動方程式）

$$u(0,x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

- 伝播速度 c が時間によって変化する場合は、エネルギー保存が成り立たない。
- $c(t)$ が微分可能でなければ、初期値の微分可能性が時間の経過とともに失われる可能性がある（derivative loss）。

定理（Colombini–DeGiorgi–Spagnolo（1979））

$c(t)$ が $0 < \gamma < 1$ に対して次を満たしているとする。

$$\sup_{0<|t-s|\leq 1} \left\{ \frac{|c(t)-c(s)|}{|t-s|^{\gamma}} \right\} < \infty$$ （γ–ヘルダー連続）

- $|\alpha_n| \leq n!^{\nu},\ \nu \leq \frac{1}{1-\gamma} \implies$ 解が存在する。
- $|\alpha_n| \leq n!^{\nu},\ \nu > \frac{1}{1-\gamma} \implies$ 解が存在しない可能性がある。

変数係数波動方程式の解析方法

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) - c(t)^2\, \partial_x^2 u(t,x) = 0}$$

1．連立常微分方程式の問題への帰着

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx),\quad u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

$$a_n''(t) + n^2 c(t)^2 a_n(t) = 0,\ a_n(0) = \alpha_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

2．変数係数常微分方程式の解析

- 変数係数2階常微分方程式の解の挙動は、定数係数の場合と比較して非常に複雑である。
- n の大きさと $c(t)$ の特性（振動や滑らかさ）によって解の挙動が大きく異なるため、解析方法を使い分ける必要がある。
- 各 $a_n(t)$ に対するエネルギー
$$e_n(t) = |a_n'(t)|^2 + n^2 c(t)^2 |a_n(t)|^2$$
は保存されない。（周波数間でエネルギーの交換が行われる。）

変数係数波動方程式の解析方法

$$\partial_t^2 u(t,x) - c(t)^2\,\partial_x^2 u(t,x) = 0$$

1．連立常微分方程式の問題への帰着

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(nx),\quad u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

$$a_n''(t) + n^2 c(t)^2 a_n(t) = 0,\ a_n(0) = \alpha_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

2．変数係数常微分方程式の解析

3．偏微分方程式の解の評価

- 解の総エネルギー

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'(t)^2 + n^2 c(t)^2 a_n(t)\right)$$

を収束させるために初期値に滑らかさ（$\{\alpha_n\}$ の減衰条件）を課し、微分可能性ない $c(t)$ が生成する特異性を吸収させる。

非線形問題(キルヒホフ方程式)への応用

$$\partial_t u - c(t)^2\, \partial_x^2 u = 0,\;\; c(t) = 1 + \frac{\delta}{2}\int_0^\pi \left(\partial_x u(t,x)\right)^2 dx$$

- エネルギー保存から、解が存在するならば $c(t)$ は有界である。(アプリオリ評価が得られる)
- 線形方程式の解は、$c(t)$ の有界性のみを仮定した場合、初期値が実解析関数ならば解が存在することがわかる。
- 初期値が次の準解析性条件を満たすならば、時間大域解が存在する。(Nishitani 1984, H. 1998)

$$\left|\phi^{(n)}(x)\right| \le M_n\,,\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty$$

- 関数の滑らかさはスペクトルエネルギーの減衰オーダーで特徴付けられるが、キルヒホフ方程式の帯域可解性は、スペクトルエネルギーの分布によって特徴づけられる可能性がある。

ご清聴ありがとうございました