三角関数と円周率

幡谷泰史　廣澤史彦

山口大学 大学院理工学研究科

3.7.1 オイラーの公式 (p.21)

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$

- 証明 1：

冪級数による定義

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} &= \sum_{n=0,2,4,\ldots} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \cos x + i \sin x. \quad \square \end{aligned}$$

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$

- 証明 2 :

指数関数による三角関数の定義

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

による:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ &= \cos x + i \sin x. \quad \square \end{aligned}$$

オイラーの等式

$$e^{i\pi} = -1.$$

証明：
オイラーの公式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) に，$x = \pi$ を代入すれば良い． $\square$

ド・モアブルの公式

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

証明：
オイラーの公式 ($e^{iy} = \cos y + i \sin y$) に，$y = nx$ を代入すれば良い． $\square$

例 3.7.1(p.22)
三角関数の加法定理を，指数関数を用いて示しましょう．

$$\cos(x \pm y) = \frac{e^{i(x\pm y)} + e^{-i(x\pm y)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} (\because \text{指数法則 } a^x \cdot a^y = a^{x+y} \text{より})$$

$$= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

□

例 3.7.3(p.22)
三角関数の 3 倍角の公式を，指数関数を用いて示しましょう．

$$
\begin{aligned}
\cos 3x &= \frac{e^{i(3x)}+e^{-i(3x)}}{2} \\
&= 4\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8} - 3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= 4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 - 3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}
$$

□

例 3.7.4(p.22)
三角関数の 4 倍角の公式を，指数関数を用いて示しましょう．

$$
\begin{aligned}
\cos 4x &= \frac{e^{i(4x)} + e^{-i(4x)}}{2} \\
&= 8\frac{(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} - 8\frac{(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 2}{4} + 1 \\
&= 8\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + 1 \\
&= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1
\end{aligned}
$$

□

例題 (類題)

三角関数の 4 倍角の公式を，指数関数を用いて示しましょう.

$$
\begin{aligned}
\cos 4x &= \frac{e^{i(4x)} + e^{-i(4x)}}{2} \\
&= 8\frac{\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} + 8\frac{\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) - 2}{4} + 1 \\
&= 8\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 - 8\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + 1 \\
&= 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1
\end{aligned}
$$

□

演習 3.7.1(p.22)

三角関数の 4 倍角の公式を，指数関数を用いて示しましょう． $\boxed{(3 \text{分})}$

$$\sin 4x = \frac{e^{i(4x)} - e^{-i(4x)}}{2i}$$

$$=$$

$$=$$

$$= 4\sin x \cdot \cos x \cdot (-2\sin^2 x + 1).$$

3.7.1 終わり

演習 3.7.1(p.22)

三角関数の 4 倍角の公式を，指数関数を用いて示しましょう． $\boxed{(3\text{ 分})}$

$$\sin 4x = \frac{e^{i(4x)} - e^{-i(4x)}}{2i}$$

$$= 4\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4}$$

$$= 4\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \cdot \left\{-2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + 1\right\}$$

$$= 4\sin x \cdot \cos x \cdot (-2\sin^2 x + 1).$$

□

3.7.1 終わり

3.7.2 三角関数の値の近似計算 (p.22)

これまでの計算では，三角関数の値を具体的に計算することはできません．しかし n を止めて近似的に

$$\tilde{c}_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

を計算できます．例えば $\tilde{c}_0(\pi) = \dfrac{(-1)^0\pi^0}{0!} = 1,$

$$\tilde{c}_1(\pi) = \frac{(-1)^0\pi^0}{0!} + \frac{(-1)^1\pi^2}{2!} = -3.9348\ldots$$

$$\tilde{c}_2(\pi) = \frac{(-1)^0\pi^0}{0!} + \frac{(-1)^1\pi^2}{2!} + \frac{(-1)^2\pi^4}{4!} = 0.1239\ldots$$

$$\tilde{c}_3(\pi) = \frac{(-1)^0\pi^0}{0!} + \frac{(-1)^1\pi^2}{2!} + \frac{(-1)^2\pi^4}{4!} + \frac{(-1)^3\pi^6}{6!} = -1.2113\ldots$$

$$\tilde{c}_4(\pi) = \frac{(-1)^0\pi^0}{0!} + \frac{(-1)^1\pi^2}{2!} + \frac{(-1)^2\pi^4}{4!} + \frac{(-1)^3\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} = -0.97602\ldots$$

と計算できます．更に

更に，これらの近似値の誤差は下の一覧表のように，$n = 1, 2, 3, \ldots$ と大きく取ることで，$\cos\pi = -1$ との誤差が 0 に収束する様子が見てとれます.

n	誤差	n	誤差
1	2.9	8	-1.4×10^{-7}
2	-1.1	9	3.5×10^{-9}
3	2.1×10^{-1}	10	-7.6×10^{-11}
4	-2.4×10^{-2}	11	1.4×10^{-12}
5	1.8×10^{-3}	12	-2.0×10^{-14}
6	-1.0×10^{-4}	13	4×10^{-16}
7	4.1×10^{-6}	14	2×10^{-16}

$x = \pi$ 以外の値でも，関数 $y = \cos x$ の近似値を求めることができます.

3.7.2 終わり

4.1 円周率とは(p.25)

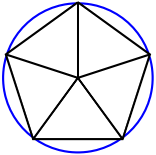
円周率の定義

半径 1 の円の面積を円周率と呼び，π と書き表わします.

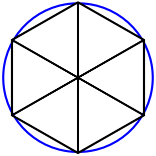
以下では，この定義と同値な様々な定義を紹介し，それらを用いて π の近似値を求めましょう.

4.2 内接する正多角形による円の面積の近似 (p.25)

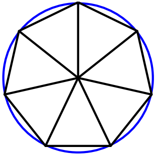
半径 1 の円を，内接する正 n 多角形で近似しましょう．



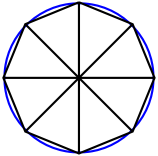
$n = 5$ のとき．



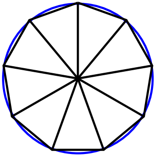
$n = 6$.



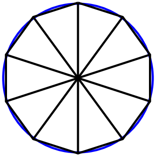
$n = 7$.



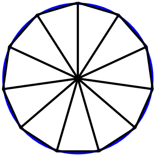
$n = 8$.



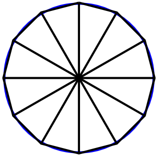
$n = 9$.



$n = 10$.

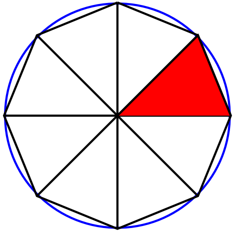


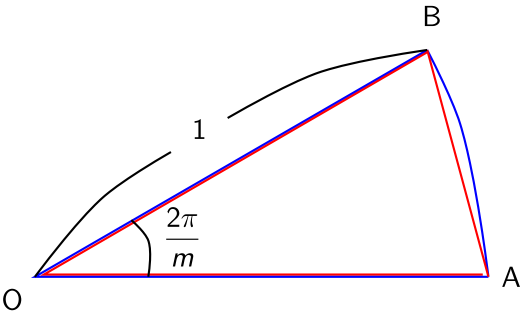
$n = 11$.



$n = 12$.

n を大きくすれば，正 n 角形の面積は π に近づくはずです．





単位円を m 等分した扇形 AOB の面積を，内接する正 m 角形を m 等分した二等辺三角形 $\triangle OAB$ の面積で近似しましょう．中心角は $\dfrac{2\pi}{m}$ ですから，

$$
\begin{aligned}
\text{扇形 } AOB \text{ の面積} &\fallingdotseq \text{二等辺三角形 } \triangle OAB \text{ の面積} \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{m}.
\end{aligned}
$$

よって正 m 角形の面積は $\dfrac{m}{2} \sin \dfrac{2\pi}{m}$ となります．

先程，$\sin\dfrac{2\pi}{m}$ は無限和

$$\sin\frac{2\pi}{m} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2\pi/m)^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

を用いて求めましたが，今回は別の方法を考えましょう．

- 三角関数の半角の公式

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad (-\pi \le \theta \le \pi)$$

を使えば，$\cos\theta$ の値が判れば $\cos\dfrac{\theta}{2}$ が判ります．

- よって，$\cos\theta, \cos\dfrac{\theta}{2}, \cos\dfrac{\theta}{2^2}, \cos\dfrac{\theta}{2^3}, \ldots$ と順番に値が判るはずです．

この半角の公式から

命題 4.2.1 (p.26)

数列 $\left\{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ は次の等式を満たす.

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

が成り立ちます.
この等式と $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ の事実を用いれば

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

更に...

更に

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^5} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}.$$ (根号は $(n-1)$ 回適用する.)

ここで，$P_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (根号は n 回適用する) と書くことにすると，

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}P_1$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}P_2$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}P_3$$

$$\cos\frac{\pi}{2^5} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{1}{2}P_4$$

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \frac{1}{2}P_{n-1}$$

と書けます．

よって,

$$P_{n+1} = \sqrt{2 + P_n}, \quad \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}P_n$$

となりました. $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} > 0$, $P_n^2 = 2 + P_{n-1}$ に気をつければ

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} &= \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}P_n^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4 - P_n^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2 - P_{n-1}}
\end{aligned}$$

を得ます.

以上より

- 正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$
- $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - P_{n-1}}$

ということが判りました．以上より，

$$P_1 = \sqrt{2}, \quad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}}\ (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす数列 P_n を用いて

$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積} = 2^n\sqrt{2 - P_{n-1}}$$

と書けました．

n を大きくすれば

$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積} = 2^n\sqrt{2 - P_{n-1}}$$

は円の面積 π に近づくことが期待されます.

n を大きくすれば

$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積} = 2^n\sqrt{2 - P_{n-1}}$$

は円の面積 π に近づくことが期待されます.

実は，このままでは誤差が大きく，計算は上手く行きません.
その理由を見ましょう．実際，右辺は π に近づくので,

$$\pi \fallingdotseq 2^n\sqrt{2 - P_{n-1}}$$

よって両辺を 2^{n+1} で割って，2 乗すれば

$$2 - \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2 \fallingdotseq P_{n-1}$$

右辺は 2 よりもちょっとだけ小さい数です.

通常，計算機では (不動点) 小数は 10 進数で約 15 桁の精度を持ちますが…

例えば $n = 10$ のときを考えましょう．$\left(\dfrac{\pi}{2^{10}}\right)^2$ は約 $\dfrac{1}{10^5}$ ですから，

$$P_9 \fallingdotseq 2 - \left(\frac{\pi}{2^{10}}\right)^2 \fallingdotseq 1.\overbrace{99999}^{5\text{ 桁}}\ \overbrace{000000000}^{9\text{ 桁}}$$

よって $2 - P_9$ は，

$$\begin{array}{rl} & 2.\overbrace{00000}^{5\text{ 桁}}\ \overbrace{000000000}^{9\text{ 桁}} \\ - & 1.99999\ 000000000 \\ \hline & \color{red}{1.\ 000000000} \times 10^{-5} \end{array}$$

(10 桁の精度しかありません!)

非常に近い 2 数の引き算により，15 桁あった情報のうち，5 桁が失われました! (“桁落ち” といいます．)

更に $n = 25$ のときを考えましょう. $\left(\frac{\pi}{2^{25}}\right)^2$ は約 $\frac{1}{10^{14}}$ ですから,

$$P_{24} \fallingdotseq 2 - \left(\frac{\pi}{2^{25}}\right)^2 \fallingdotseq 1.\overbrace{99999999999999}^{14\text{ 桁}}$$

よって $2 - P_{24}$ は,

$$\begin{array}{rl} & 2.\overbrace{00000000000000}^{14\text{ 桁}} \\ - & 1.99999999999999 \\ \hline & 1 \times 10^{-14} \end{array}$$

(1 桁の精度しかありません!)

つまり

- n を大きくすれば, 正 2^{n+2} 多角形は円に近づきますが,
- n を大きくすれば, 計算は精度を失ないます.

そこで, 工夫をしましょう.

そこで，工夫をしましょう．
$4-P_n^2=2-P_{n-1}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
2-P_n &= \frac{4-P_n^2}{2+P_n} \\
&= \frac{2-P_{n-1}}{2+P_n} \\
&= \frac{2-P_{n-2}}{(2+P_n)(2+P_{n-1})} \\
&= \frac{2-P_{n-3}}{(2+P_n)(2+P_{n-1})(2+P_{n-2})} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2-P_1}{(2+P_n)(2+P_{n-1})\cdots(2+P_2)}.
\end{aligned}
$$

よって，

$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積} = 2^n\sqrt{2 - P_{n-1}}$$
$$= 2^n\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{(2+P_{n-1})(2+P_{n-2})\cdots(2+P_2)}}.$$

数列と漸化式の形に整理をしましょう．

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2+P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$
$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2+P_n)\cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$
$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積 } S_n = 2^n\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$$

と書けます．具体的に計算してみましょう．

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	正 2^{n+2} 角形の面積 $S[n]$	
2	1			2		
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{正 } 2^{n+2} \text{ 角形の面積 } S_n = 2^n \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	■■■		2		
3	2		■■■			
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	$= sqrt(2)$		2		
3	2		$= 2 + B3$	■■■		
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	$= sqrt(2)$		2		
3	2	■■■	$= 2 + B3$	$= D2 * 2$		
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	$= sqrt(2)$		2		
3	2	$= sqrt(2 + B2)$	$= 2 + B3$	$= D2 * 2$		
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	$= sqrt(2)$		2		
3	2	$= sqrt(2 + B2)$	$= 2 + B3$	$= D2 * 2$		
4	3		$= (2 + B4) * C3$			
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

	A	B	C	D	E	
1	n	$P[n]$	$Q[n]$	2^n	$S[n]$	
2	1	$= sqrt(2)$		2		
3	2	$= sqrt(2 + B2)$	$= 2 + B3$	$= D2 * 2$		
4	3		$= (2 + B4) * C3$		$= D3 * sqrt((2 - sqrt(2))/C2)$	
5	4					
6	5					
7	6					

$$P_1 = \sqrt{2}, \qquad P_n = \sqrt{2 + P_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$Q_2 = 2 + P_2, \qquad Q_n = (2 + P_n) \cdot Q_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

正 2^{n+2} 角形の面積 $S_n = 2^n \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{Q_{n-1}}} \quad (n \geq 3)$

n	数値誤差
4	5.0×10^{-3}
6	3.2×10^{-4}
8	2.0×10^{-5}
10	1.2×10^{-6}
12	7.8×10^{-8}
14	1.2×10^{-9}
16	4.6×10^{-8}
18	9.6×10^{-7}
20	8.2×10^{-5}
22	8.6×10^{-4}
24	2.1×10^{-2}
25	2.1×10^{-2}

工夫無しの計算

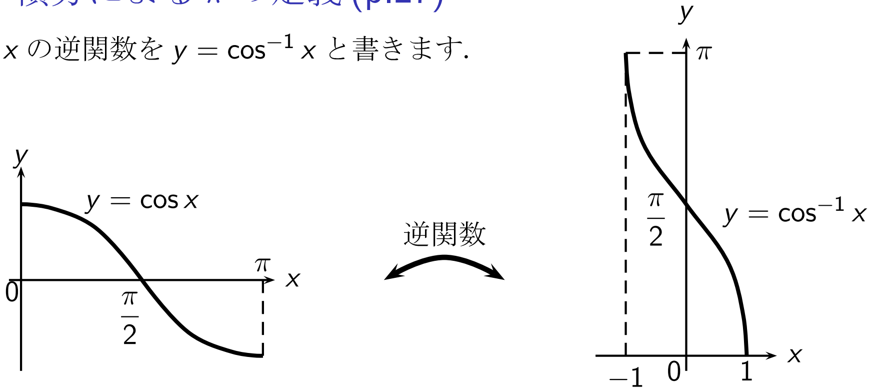
n	数値誤差
4	5.0×10^{-3}
6	3.2×10^{-4}
8	2.0×10^{-5}
10	1.2×10^{-6}
12	7.7×10^{-8}
14	4.8×10^{-9}
16	3.0×10^{-10}
18	1.9×10^{-11}
20	1.2×10^{-12}
22	7.3×10^{-14}
24	4.9×10^{-15}
25	8.9×10^{-16}

工夫有りの計算

— 4.2 終わり

4.3 積分による π の定義 (p.27)

$\cos x$ の逆関数を $y = \cos^{-1} x$ と書きます.



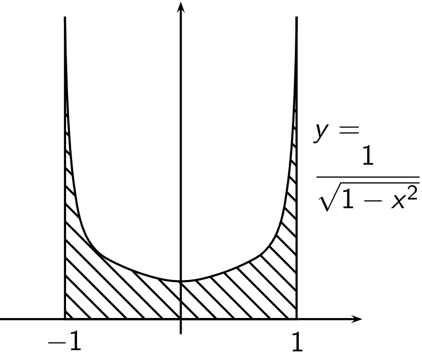
逆関数 $\cos^{-1} x$ は

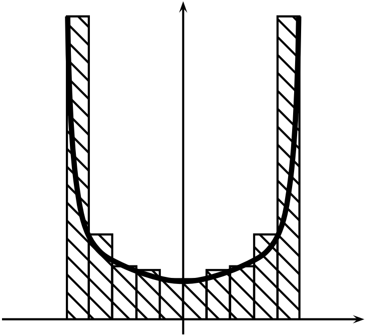
$$\cos^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

とも書けました．よって

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

が成り立ちます．　この右辺の積分を，近似的に求めましょう．





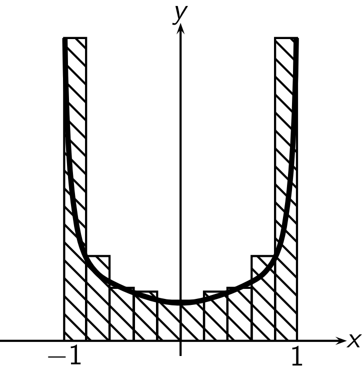
$$\cos^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\fallingdotseq$ 長方形の面積の和で近似

$$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{N})^2}}$$



$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$\fallingdotseq$ 長方形の面積の和で近似
$$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{N})^2}}$$

工夫をすると，例えばたった 14 個の長方形で近似しても誤差は 8.8×10^{-15} 程度の誤差で π の値を求めることができます．(森・高橋の二重指数関数 (DE) 公式) (詳細は省略．)

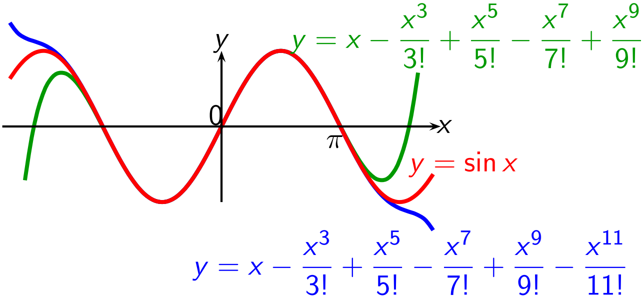
4.3 終わり

4.4 三角関数の零点としての π の定義 (p.27)

三角関数は，無限級数で表わされました．

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

n を有限な値で止めると



$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ とおきましょう.

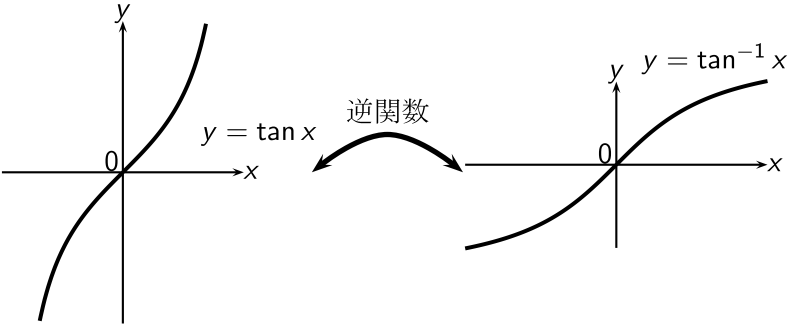
$$s_6(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$
$$s_7(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}$$
$$s_8(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}$$

$$s_6(3.1411) = 4.8 \times 10^{-5} > 0 > -5.1 \times 10^{-5} = s_6(3.1412)$$
$$s_7(3.1416) = 1.3 \times 10^{-5} > 0 > -8.6 \times 10^{-5} = s_7(3.1417)$$
$$s_8(3.141591) = 8.8 \times 10^{-7} > 0 > -1.2 \times 10^{-7} = s_8(3.141592)$$

このように, 級数の零点として π を特徴付けることもできます.

4.4 終わり

4.5 逆正接関数の冪級数展開を用いた π の定義



$y = \tan^{-1} x$ は次の冪級数で与えられます．(証明は省略)

$$\tan^{-1} x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1}$$

$x = 1$ を代入すれば

$$4 \times \frac{\pi}{4} = 4 \times \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

この冪級数の n を有限に止めて近似計算しますと，
とても収束速度が遅いです．

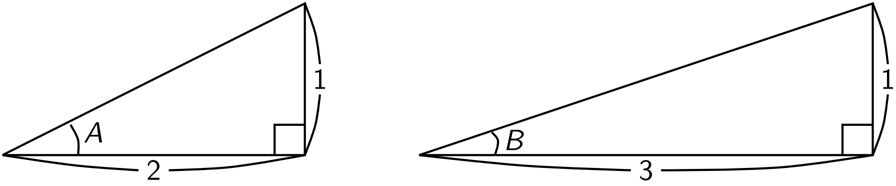
$$\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \fallingdotseq 3.13159\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \fallingdotseq 3.14059\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{10000} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \fallingdotseq 3.14149\ldots$$

そこで，工夫をしましょう．

$\tan A = \dfrac{1}{2}, \tan B = \dfrac{1}{3}$ を満たす角 $0 < A, B < \dfrac{\pi}{2}$ をとりましょう.



すると，$A + B = \dfrac{\pi}{4}$ となります．実際 $\tan(A+B)$ の加法定理より

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

よって $\tan(A+B) = 1$ であるので，$A + B = \dfrac{\pi}{4}$ となります.

以上をまとめると,

- $A + B = \dfrac{\pi}{4}$
- $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$
- $B = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}$

よって

$$\pi = 4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

が成り立ちます.

n を止めた有限和

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \right\}$$

は収束が速く

$$4\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \right\} \fallingdotseq 3.33333\ldots$$

$$4\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \right\} \fallingdotseq 3.11728\ldots$$

$$4\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \right\} \fallingdotseq 3.14557\ldots$$

$$4\sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \right\} \fallingdotseq 3.14159\ldots$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1						
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	■■■					
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	■■■				
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	$=2*A2-1$				
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	$=2*A2-1$	$=1/2\wedge C2$	■■■		
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	$=2*A2-1$	$=1/2\wedge C2$	$=1/3\wedge C2$		
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	$=2*A2-1$	$=1/2\wedge C2$	$=1/3\wedge C2$	$=4*B2*(D2+E2)/C2$	
3	4						
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	k	$(-1)^{k-1}$	$2k-1$	$1/2^{2k-1}$	$1/3^{2k-1}$	$S[n]$	
2	1	$=(-1)\wedge(A2-1)$	$=2*A2-1$	$=1/2\wedge C2$	$=1/3\wedge C2$	$=4*B2*(D2+E2)/C2$	
3	4					$=4*B3*(D3+E3)/C3+F2$	
4	4						
5	5						
6	6						

$$\pi \fallingdotseq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right\}$$

4.5 終わり

4.6 その他の定義 (p.29)

- リーマンのゼータ (ζ-) 関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

- 逆正接関数 ($\tan^{-1}$)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

- 振動積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

- ガンマ (Γ−) 関数

$$\int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

数学をなぜ学ぶのか

数学をなぜ学ぶのか

東京大学先端科学技術センター教授 西成活裕

ビジネスパーソンに必要な 6 つの「思考体力」

(日経ビジネス Associé 2011/06/21)

- **能動的に考える「自己駆動力」**
  何事につけ，ベースとなる力.

数学をなぜ学ぶのか

- **能動的に考える「自己駆動力」**
  何事につけ，ベースとなる力.
- **常に一歩先を考える「多段思考能力」**
  論理的に順序立てて，深掘りしていく作業.
  脳に汗をかき，考え尽した人の思考の力強さ.
  数学者の場合，思考を 100 段 1000 段と重ねる場合もある.
  ビジネス 国家 世の中は複雑 (単段的な思考では無く，奥深い思考を)

数学をなぜ学ぶのか

- **能動的に考える「自己駆動力」**
  何事につけ，ベースとなる力.
- **常に一歩先を考える「多段思考能力」**
  論理的に順序立てて，深掘りしていく作業.
- **あらゆることを疑ってみる「疑い力」**
  1 つの事柄を様々な方向から検討し，変更の余地がないか考える.

数学をなぜ学ぶのか

- **能動的に考える「<u>自己駆動力</u>」**
  何事につけ，ベースとなる力.
- **常に一歩先を考える「<u>多段思考能力</u>」**
  論理的に順序立てて，深掘りしていく作業.
- **あらゆることを疑ってみる「<u>疑い力</u>」**
  1 つの事柄を様々な方向から検討し，変更の余地がないか考える.
- **全体を俯瞰して見る「<u>大局力</u>」**
  どうでも良い事を捨て去り，大切な部分だけを抜き出す.
  物事を**抽象化**し，本質的な部分を掴みとる能力.

数学をなぜ学ぶのか

- **能動的に考える「自己駆動力」**
  何事につけ，ベースとなる力.
- **常に一歩先を考える「多段思考能力」**
  論理的に順序立てて，深掘りしていく作業.
- **あらゆることを疑ってみる「疑い力」**
  1つの事柄を様々な方向から検討し，変更の余地がないか考える.
- **全体を俯瞰して見る「大局力」**
  物事を**抽象化**し，本質的な部分を掴みとる能力.
- **各場面で物事を分類し，選び取る「場合分け力」**
  プランAがダメだったらプランB，プランBがダメだったらプランC...
  問題の解決に考えられるいくつかのルートに分けて，それぞれについて先を読んでいく
  条件分岐/場合分けを尽す．日本人に欠落しがち.

数学をなぜ学ぶのか

- **能動的に考える「<u>自己駆動力</u>」**
  何事につけ，ベースとなる力.
- **常に一歩先を考える「<u>多段思考能力</u>」**
  論理的に順序立てて，深掘りしていく作業.
- **あらゆることを疑ってみる「<u>疑い力</u>」**
  1 つの事柄を様々な方向から検討し，変更の余地がないか考える.
- **全体を俯瞰して見る「<u>大局力</u>」**
  物事を**抽象化**し，本質的な部分を掴みとる能力.
- **各場面で物事を分類し，選び取る「<u>場合分け力</u>」**
  条件分岐/場合分けを尽す.
- **思考をジャンプさせる「<u>アナロジー (類推) の力</u>」**
  思考が止まった時・ピンチになった時に，思考のステップを数段すっ飛ばして (一見突拍子も無いような) 選択肢を見つける方法.
  全く異なる 2 つの事柄に，共通性を見い出して結びつける
  根底にあるのは遊び心.

1. 能動的に考える「自己駆動力」
2. 常に一歩先を考える「多段思考能力」
3. あらゆることを疑ってみる「疑い力」
4. 全体を俯瞰して見る「大局力」
5. 各場面で物事を分類し，選び取る「場合分け力」
6. 思考をジャンプさせる「アナロジー (類推) の力」

1. 能動的に考える「自己駆動力」
2. 常に一歩先を考える「多段思考能力」
3. あらゆることを疑ってみる「疑い力」
4. 全体を俯瞰して見る「大局力」
5. 各場面で物事を分類し，選び取る「場合分け力」
6. 思考をジャンプさせる「アナロジー (類推) の力」

社会のリーダー，中堅層，実務者，家庭人，経営者...

など広い範囲の社会人が必要とする能力.

$\Longleftarrow$ 数学 (や様々な演習や思考) を通じて得た経験.

御静聴，有難うございました.