

2024年度 山口大学公開講座

$$(-1) \times (-1) = 1 ?$$

山口大学創成科学研究科
(山口大学理学部数理科学科)

廣澤 史彦

録画

- 講義動画, 資料の公開
- 講義内容・レベル
- 途中の休憩, 飲食
- 質問等

1. 導入

(問題) $(-1) \times (-1) = 1$

• -1 ? ③
• \times ? ① 「+」
• 1 ? ②
(• $=$?)

明確に可

2 たし算

(問題) たし算とは何なのか？

(例) $1+1=2$, $2+3=5$, $1+2=3$

$x \backslash y$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

$x + y$

- ① たし算を計算する \Rightarrow 表を読み取る
- 表が存在する \Rightarrow たし算が計算できる

たし算 \Leftrightarrow 表 (2a + a)

$$2 + 3 = 5$$

$$x + y = z$$

数 x と数 y に対して表から数 z が定まる

二項演算

仲度

(例) $x+y$

$x \backslash y$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

(集合 $\{1, 2, 3\}$ から
集合 $\{1, 2, 3\}$ への二項演算)

$$(1) 1 + 2 = 3$$

$$(2) (2+3) + (1+2)$$

$$= 2 + 3$$

$$= 2$$

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	1	2
2	3	2	2
3	3	1	1

(問題)

$$(1) (1+2) + 3 \\ = 1 + 3 = 2$$

$$(2) 1 + (2+3) \\ = 1 + 2 = 1$$

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

(問題)

$$(1) 1 + 2 = 2$$

$$(2) 2 + 1 = 1$$

$x \backslash y$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$(1 + 2) + 3 = 6$$

$$1 + (2 + 3) = 6$$

一般化すると、次のように表すことができる。

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

上記の二項演算は、自然数 $\{1, 2, 3, \dots\}$
から自然数への二項演算。 ?

1° 2 / の公理 自然数 \mathbb{N} とは、次の

(1) ~ (5) の性質を満たす概念である。

(1) \mathbb{N} の中には、「1」がある

(2) \mathbb{N} の要素から \mathbb{N} の要素への写像 (対応)
suc が存在する。

(3) \mathbb{N} の要素 a, b が「異なるならば」

suc(a) と suc(b) も異なる

a に対応する
 \mathbb{N} の要素

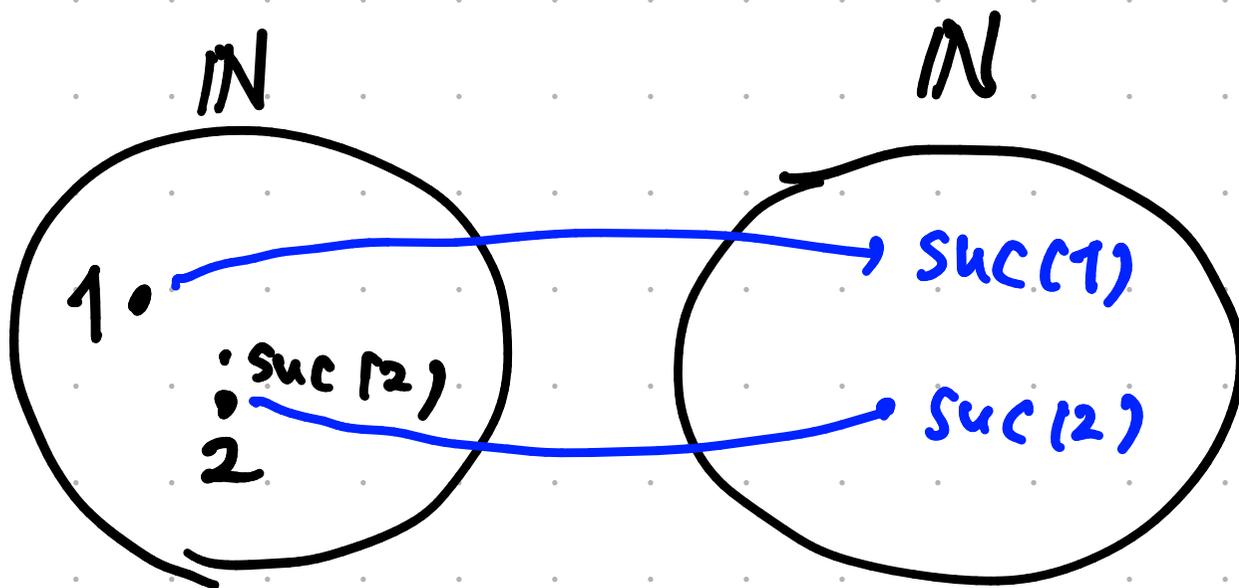
(4) $\forall a \in \mathbb{N}$ が任意要素 a に対して \exists も.

$\text{Suc}(a)$ は 1 ではない.

(写像 Suc で 1 に対応させる a はない)

(5) 数学的帰法が成り立つ.

~ 11:28



$\text{Suc}(1) = 1$?

(4), $a=1$ とみれば

$\text{Suc}(1) \neq 1$.

$\text{Suc}(1) \neq 1$ より $\text{Suc}(1) = 2$ と表す.

$1 \neq 2$ と (3) より $\text{succ}(1) \neq \text{succ}(2)$

$\text{succ}(2) \neq 2$?

$\text{succ}(2) \neq 1$?

... このようにして、 \mathbb{N} は

$\{1, 2 = \text{succ}(1), 3 = \text{succ}(2), 4 = \text{succ}(3), \dots\}$

という無限集合でなければならぬ。

(問題) リンゴ 3個 に 1/2 5個 を加える

$$3 + 5 = 8$$

(問題) リンゴ 5個 に 1/2 x 個 を加えると
8個 になった。

$$5 + x = 8 \quad (\text{方程式})$$

表より. $x = 3$

(問題) リンゴ 5個 に 1/2 x 個 を加えると
3個 になった。

$$5 + x = 3$$

(表から x の値)
は定まらな!!

\mathbb{N} は、方程式の解を定めるのに不十分

⇒ \mathbb{N} を拡張する...

\mathbb{R}

定義 (0 (零))

たし算が定義された集合 \mathbb{R} において

次を満たす x を零元とよび、「0」と表す。

「 \mathbb{R} のどのような要素 a に対しても。

$$a + x = x + a = a$$

である

(注意) \mathbb{N} の要素には「0」の性質を満たすものはいない!

定義 $(-a)$

たし算が定義された集合 \mathbb{R} の要素 a に対し、
次を満たす x を、 a の加法の逆元といい
「 $-a$ 」と表す。

$$a + x = x + a = 0$$

例えば、 -2 とは、 $2 + (-2) = 0$ を満たす数

問題 $-(-2) = 2$ を証明せよ。

-2 の加法の逆元 \Rightarrow $\boxed{-2 + (-(-2)) = 0}$
 $a + (-a) = 0$

$$-(-2) \approx -(-2) + 0$$

$$\approx -(-2) + (-2 + 2)$$

$$= \underbrace{(-(-2) + (-2))}_{0} + 2$$

0 ... $-(-2)$ の定義より $0 \neq 0$

$$\approx 0 + 2$$

$$= 2$$

$$2 \times 0 = 0 \Rightarrow (-1) \times (-1) = 1$$