2024年度
山口大学公開講座

$(-1)\times(-1)=1$?

山口大学創成科学研究科
（山口大学理学部数理科学科）
廣澤 史彦

録画

2日目

数学の記号

$A = \{a, b, c, \cdots\}$

✓ $a \in A$ ： a は A の要素である

$\forall a \in A$ ： 任意の，全ての．

$\exists a \in A$ ： 存在する．

集合 A の中に a が存在する．

$\exists !$ ： 唯一
存在

ペアノの公理による自然数$\mathbb{N}$の構成

- $1 \in \mathbb{N}$
- $suc(1) \in \mathbb{N}$ かつ $suc(1) \neq 1$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ は少なくとも2つの要素 $1, suc(1)$
をもつ（$suc(1) = 2$ と表す）

- $suc(2) \in \mathbb{N}$, $suc(2) \neq 1$, $suc(2) \neq 2$

より $\mathbb{N}$ は少なくとも3つの要素
$1, 2, suc(2) = 3$ をもつ.

- 上記の手続きを繰り返して構成される無限集合が $\mathbb{N}$ である.

$$\{1,\ suc(1),\ suc(2),\ \cdots\}$$

$$= \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

定義 (0 (零元))

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a + x = x + a = a \iff x = 0$

定義 ($-a$ (加法の逆元))

$a + x = x + a = 0 \iff x = \boxed{-a}$

問題 $-(-2) = 2$ を証明せよ.

-2 の加法の逆元 $\Leftrightarrow$ $\boxed{-2 + (-(-2)) = 0}$

$a + (-a) = 0$

$-(-2) = -(-2) + 0 = -(-2) + (-2 + 2)$

$= (-(-2) + (-2)) + 2 = 0 + 2 = 2$

たし算の表の構成方法

$x + y = \boxed{}$

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	…
1	2	3	4	5	6	
2	3	4	5	6	7	
3	4	5	6	7	8	
4	5	6	7	8	9	
5	6	7	8	9	10	
⋮						

$\boxed{\text{suc}}$

suc(1)

本日の目標

- $2 \times 0 = 0$ の証明
- $(-1) \times (-1) = 1$ の証明
- 分数の割り算について

たし算のルール（集合$\mathbb{R}$上の）

(R1) $a+b=b+a$ （交換律）

(R2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ （結合律）

(R3) $\exists 0\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R},$

$$a+0=0+a=a$$

(R4) $\forall a\in\mathbb{R},\ \exists -a\in\mathbb{R}$

$$a+(-a)=-a+a=0$$

定義 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a-b$ を次のように定義する.

$$a-b = a+(-b)$$

3. かけ算

- $a, b \in \mathbb{R}$ に対して二項演算 $a \cdot b$ をかけ算とよぶ.

- $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 2 = 6$

  一般に $a \cdot b = b \cdot a$

- $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$, $2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$

  一般に $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R},$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \\ \qquad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \end{array} \right)$$

$a \neq 0$

かけ算の定義

かけ算とは，$\mathbb{R}$上で次の性質を持つ二項演算である．($a, b, c \in \mathbb{R}$)

(R5) $a \cdot b = b \cdot a$

(R6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(R7) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}.\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(R8) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}.$

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

定義（分数） $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ に対して

$\frac{a}{b}$ を次で定義する

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

定義（割り算） $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ に対して

$a \div b$ を次で定義する.

$$a \div b = \frac{a}{b} \left(= a \cdot b^{-1} \right)$$

(問題) $(2^{-1})^{-1}=2$ (R5)〜(R8)を用いて証明せよ. (ヒント: $-(-2)=2$ の証明)

$$-(-2)=-(-2)+0=-(-2)+(-2+2)$$
$$=(-(-2)+(-2))+2=0+2=2$$

証明 $(2^{-1})^{-1}=(2^{-1})^{-1}\cdot 1=(2^{-1})^{-1}\cdot(2^{-1}\cdot 2)$

a^{-1} : a インバース

$$=((2^{-1})^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot 2$$

$$(\underbrace{a^{-1}\cdot a}_{1})$$

有理数

$$=1\cdot 2=2$$

$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \text{整数（0と負の数の導入）} \\ \quad\ \to \text{有理（逆数の導入）} \end{array}}$

(R9) $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

(例) $3\times(5+4) = 3\times 5 + 3\times 4$

(R10) $1 \neq 0$

(R1)〜(R10)から証明される性質

(後日・資配布)

(r1) $\exists! 0 \in \mathbb{R}$　(0は1つしか存在しない)

(r2) $\exists! -a \in \mathbb{R}$　(aに対して$-a$は1つしかない)

(r3) $\exists! a^{-1} \in \mathbb{R}$　(aに　:　a^{-1}　:　)

(r4) $-(-a) = a$

(r5) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(r6) $(-1) \cdot a = -a$

$(-1)\times(-1)=1$ の証明

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot(-1) &= (-1)\cdot(-1)+0 && \text{(R3)}\\
&= (-1)\cdot(-1)+(-1+1) && \text{(R4)}\\
&= ((-1)\cdot(-1)+(-1))+1 && \text{(R2)}\\
&= ((-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1)+1 && \text{(R7)}\\
&= (-1)\cdot(-1+1)+1 && \text{(R9)}\\
&= -1\cdot 0+1 && \text{(R4)}\\
&= 0+1 && \boxed{\text{(r5)}}\\
&= 1 && \text{(R3)}
\end{aligned}
$$

(r5) の証明

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0 + 0 \\
&= a\cdot 0 + (a + (-a)) \\
&= (a\cdot 0 + a) + (-a) \\
&= (a\cdot 0 + a\cdot 1) + (-a) \\
&= a\cdot(0 + 1) + (-a) \\
&= a\cdot 1 + (-a) \\
&= a + (-a) = 0
\end{aligned}
$$

(r12) $a^{-1}\cdot b^{-1} = (a\cdot b)^{-1}$ $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}\right)$

証明

$$a^{-1}\cdot b^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot 1 \qquad c\cdot c^{-1}=1$$

$$= a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot\left(\underbrace{\boxed{(a\cdot b)}}_{= c}\cdot\underbrace{\boxed{(a\cdot b)}^{-1}}_{= c^{-1}}\right)$$

$$= (a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot(a\cdot b))\cdot(a\cdot b)^{-1}$$

$\vdots$

$$= (\underbrace{(a^{-1}\cdot a)}_{=1}\cdot\underbrace{(b^{-1}\cdot b)}_{=1})\cdot(a\cdot b)^{-1}$$

$\vdots$

$$= 1\cdot(a\cdot b)^{-1} = (a\cdot b)^{-1}$$

(r12) $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$

$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$ の証明

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (b \cdot a^{-1}) \div (d \cdot c^{-1})$$
$$= (b \cdot a^{-1}) \cdot (d \cdot c^{-1})^{-1}$$
$$= (b \cdot a^{-1}) \cdot (d^{-1} \cdot (c^{-1})^{-1})$$
$$= (b \cdot a^{-1}) \cdot (d^{-1} \cdot c)$$
$$= (b \cdot a^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$$

$\boxed{(a^{-1})^{-1} = a}$

┘

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a\cdot b}$$ も証明できる

（資料）