ペアノの公理 (Peano axioms)

自然数全体の集合$\mathbb{N}$とは, 以下の「ペアノの公理 (Peano axioms)」を満たす概念として定義される:

(i) $\exists 1 \in \mathbb{N}$ （自然数1が存在する）

(ii) $\exists \mathrm{suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{suc}(a) \in \mathbb{N}$

（どんな自然数 a に対しても, それを「後者」の自然数に対応させる写像 suc (successor) が存在する）

(iii) $a \neq b \;\Rightarrow\; \mathrm{suc}(a) \neq \mathrm{suc}(b)$ （異なる自然数の後者は異なる）

(iv) $\forall a \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{suc}(a) \neq 1$ （1 はどのような自然数の後者ではない）

(v) $P(1) \wedge (P(a) \Rightarrow P(\mathrm{suc}(a))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

（1 の場合にある性質 $P(1)$ が成り立ち, かつ a についても性質 $P(a)$ が成り立ちならば $\mathrm{suc}(a)$ も性質 $P(\mathrm{suc}(a))$ が成り立つとするならば, すべての自然数 n についても性質 $P(n)$ が成り立つ）

これらの公理より, $\mathbb{N}$ は次のように表される集合である。

$$\mathbb{N} = \{1, \mathrm{suc}(1), \mathrm{suc}(\mathrm{suc}(1)), \mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(1))), \ldots\}$$

特に次のような表記

$$\mathrm{suc}(1) = 2,\;\; \mathrm{suc}(2) = 3,\;\; \mathrm{suc}(3) = 4,\;\; \mathrm{suc}(4) = 5, \cdots$$

を導入すると, $\mathbb{N}$ は次のように表される.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$