令和4年度 山口大学公開講座

紙工作で体験する三角関数

山口大学創成科学研究科（理学部数理科学科）

廣澤史彦

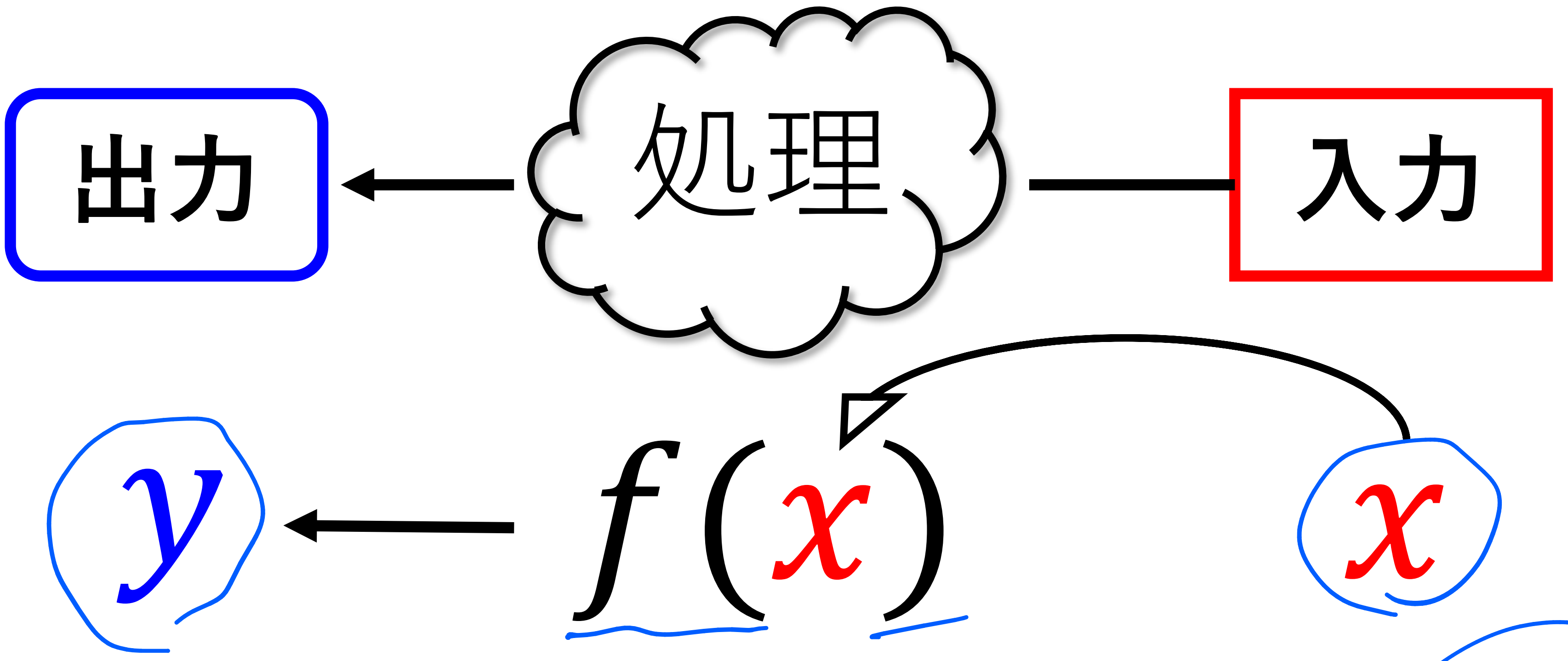
令和4年度 山口大学公開講座

紙工作で体験する三角関数

QRコードのリンク先に講義資料を公開する予定です

1.「三角関数」って何？

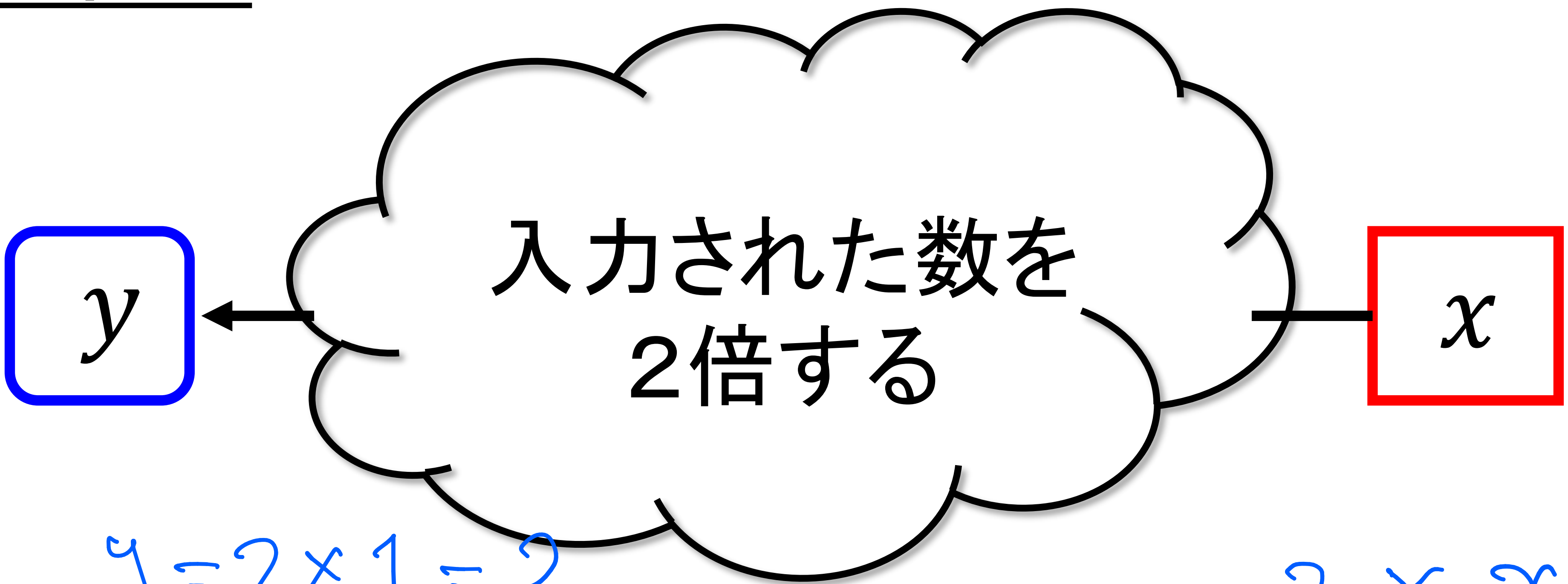
1.1 関数とは



$$\boxed{y = f(x)}$$

f: *function*（関数・機能・作用）

関数の例1



$x=1,\ y=2\times 1=2$

$x=3,\ y=2\times 3=6$

$2\times x$

$$\boxed{y=2x}$$

関数の例2

$x^2 = x \times x$

$3^2 = 3 \times 3$

y ← 入力された数を2乗する ← x

$x = 1,\ y = 1^2 = 1$

$x = 2,\ y = 2^2 = 4$

$x = -1,$

$y = (-1) \times (-1)$

$= 1$

$$y = x^2$$

$(-1) \times (-1)$

$= 1$?

関数の例3

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{2} = 1.41\cdots$

y ← 入力した数 x の平方根 ← x

2乗してxになる正の数

$\sqrt{9}$: ?×? = 9

3, −3

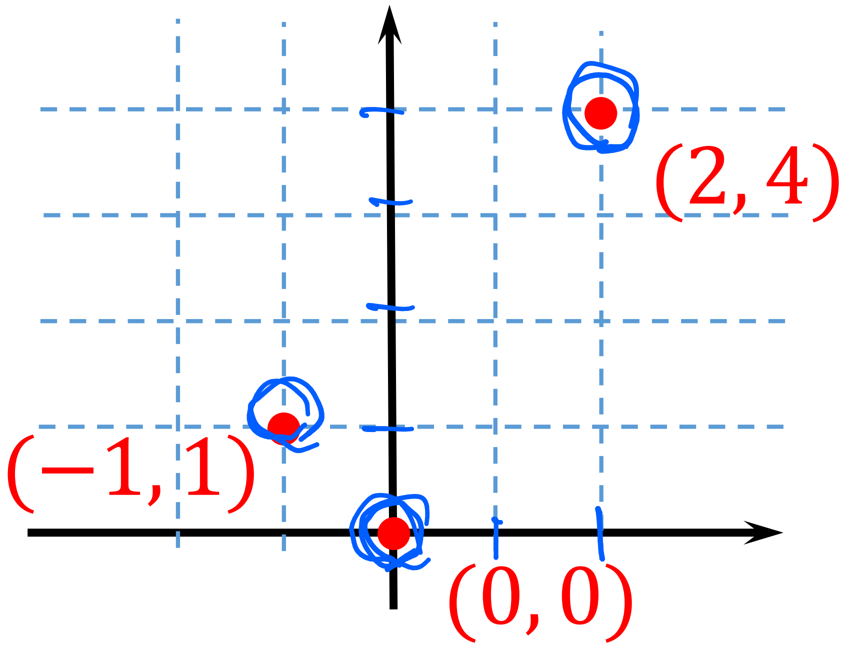
$$\boxed{y = \sqrt{x}}$$

$\boxed{9}\ \boxed{\sqrt{\ }} = 3$

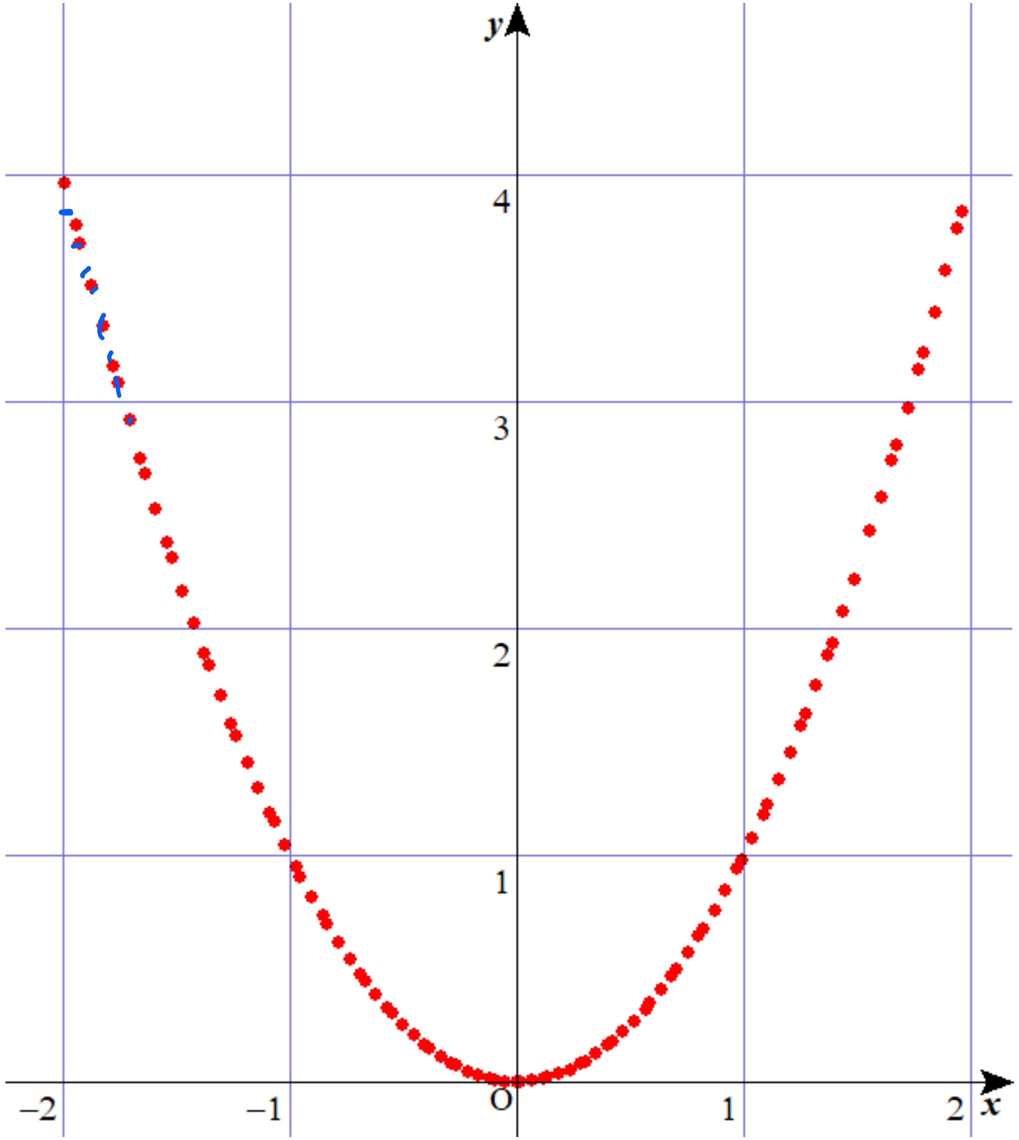
1.2 関数とグラフ

関数 $y=f(x)$ のグラフ（$f(x)=x^2$ の場合）

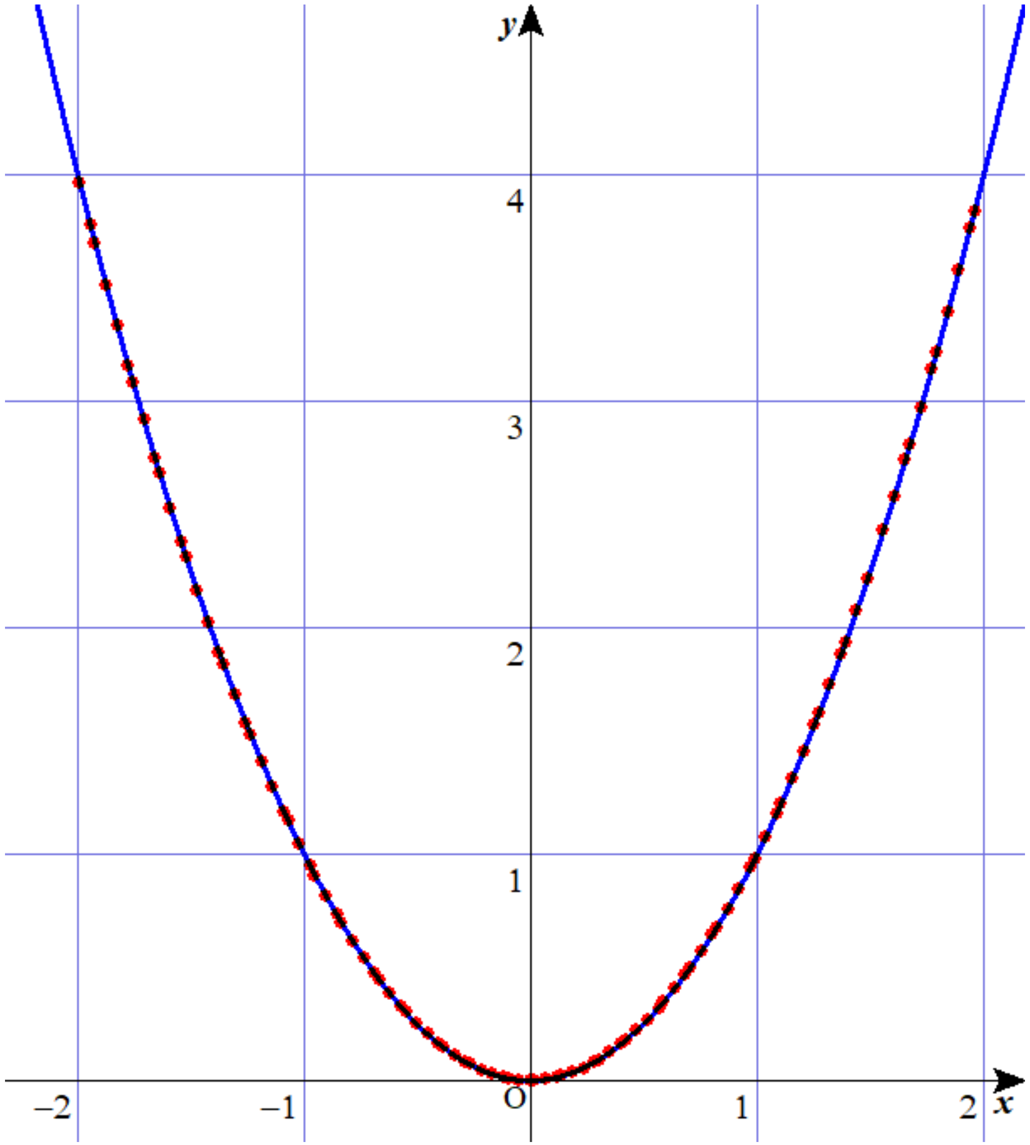
- 入力した x に対応する $f(x)$ を計算して点 $(x,f(x))$ を描く
- $x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2=1 \Rightarrow (-1,1)$
- $x=0 \Rightarrow f(0)=0^2=0 \Rightarrow (0,0)$
- $x=2 \Rightarrow f(2)=2^2=4 \Rightarrow (2,4)$



$y = x^2$

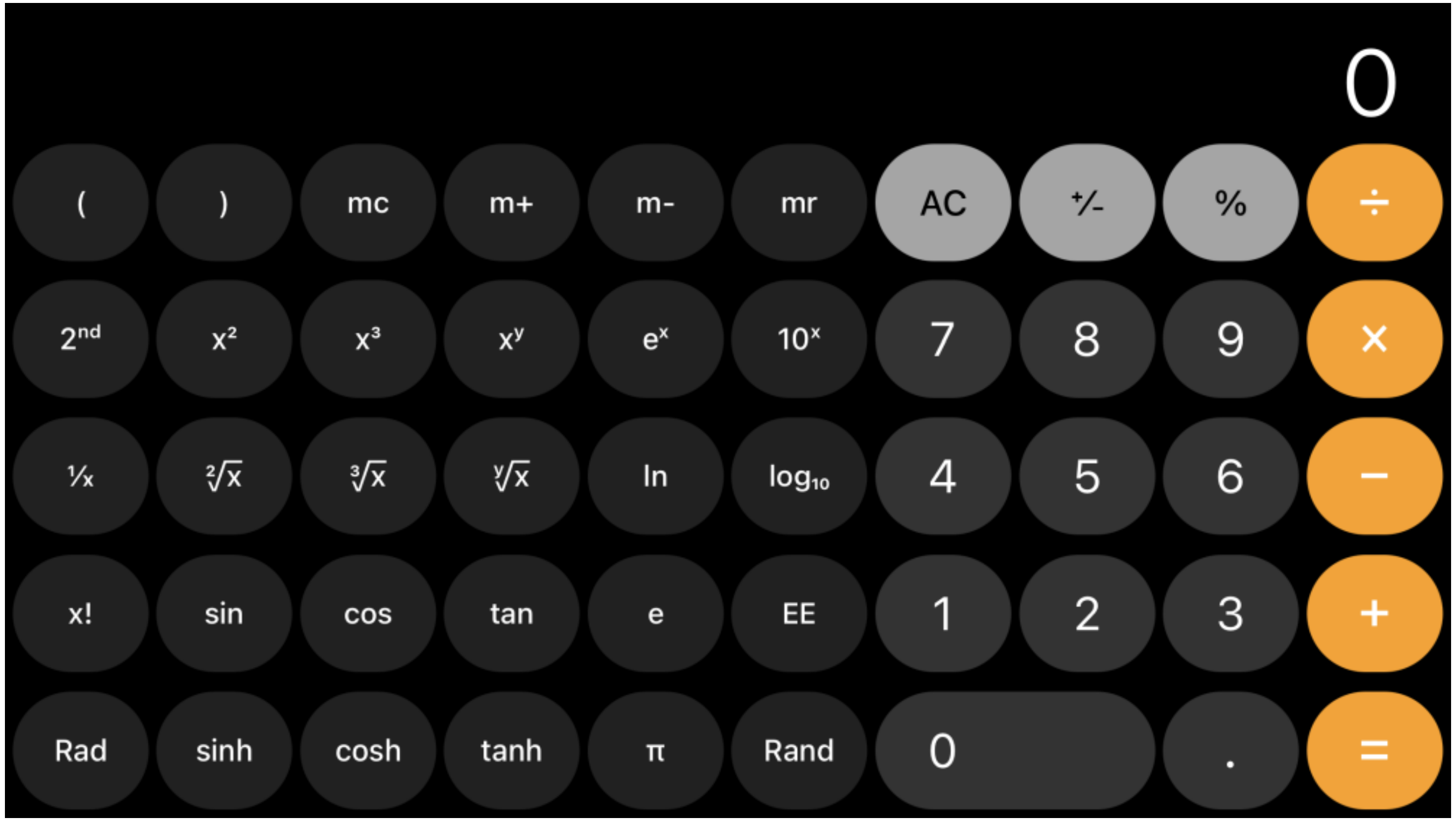


2次関数 $y = f(x) = x^2$ のグラフ: 放物線



1.3 三角関数の計算とグラフ

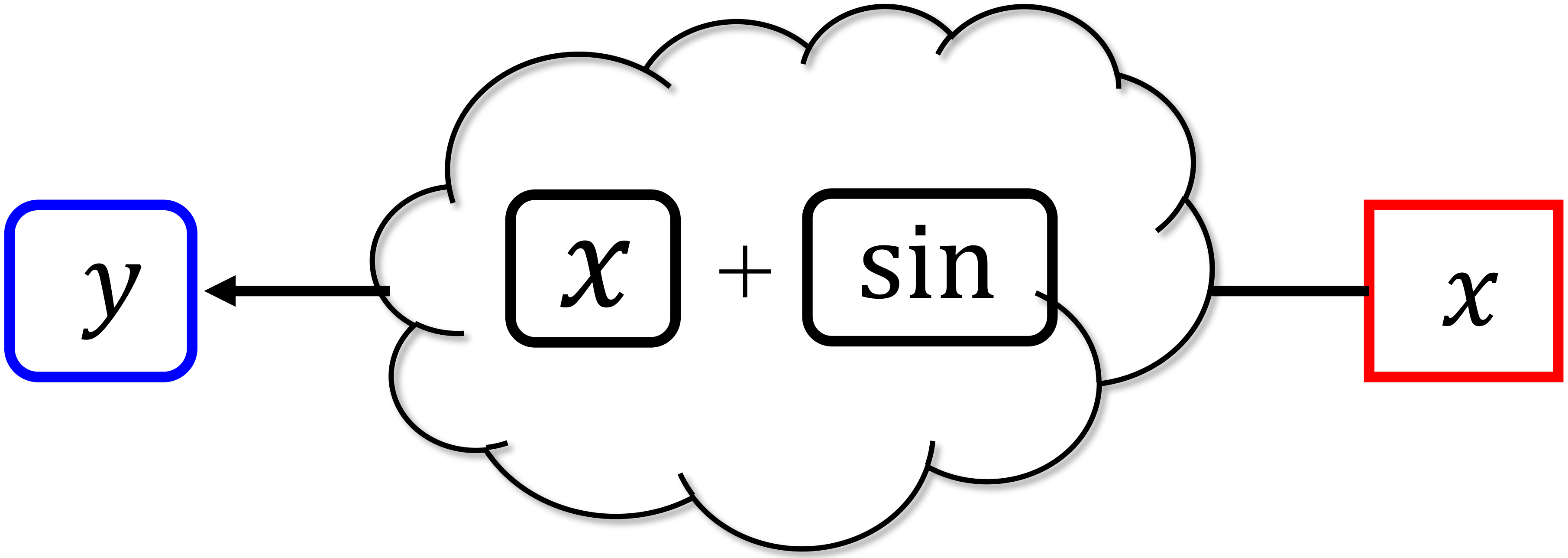
スマホの「計算機」を横向きにすると・・・



三角関数などを計算するための「関数電卓」機能が使える

「Rad」を表示させる

このボタンを押して「Deg」と「Rad」を切り替える



$$\boxed{y = \sin(x)}$$

関数電卓を使って関数 $\sin(x)$ の値を計算してみると・・・

$\sin(1) = 0.84147\ldots$

$\sin(2) = 0.90929\ldots$

$\sin(3) = 0.14112\ldots$

$\sin(-1) = -0.84147\ldots$

$\sin(-2) = -0.90929\ldots$

$\sin(-3) = -0.14112\ldots$

$\sin(0.5) = 0.47942\ldots$

$\sin(0.4) = 0.38941\ldots$

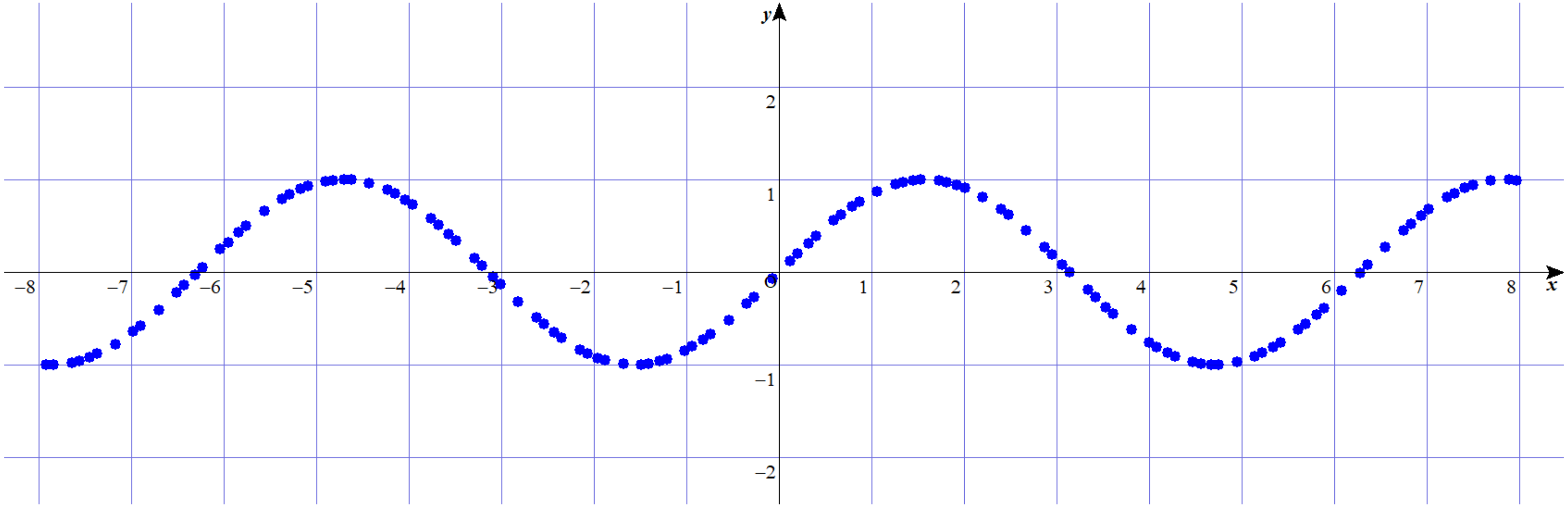
$\sin(0.3) = 0.29552\ldots$

$\sin(0.2) = 0.19866\ldots$

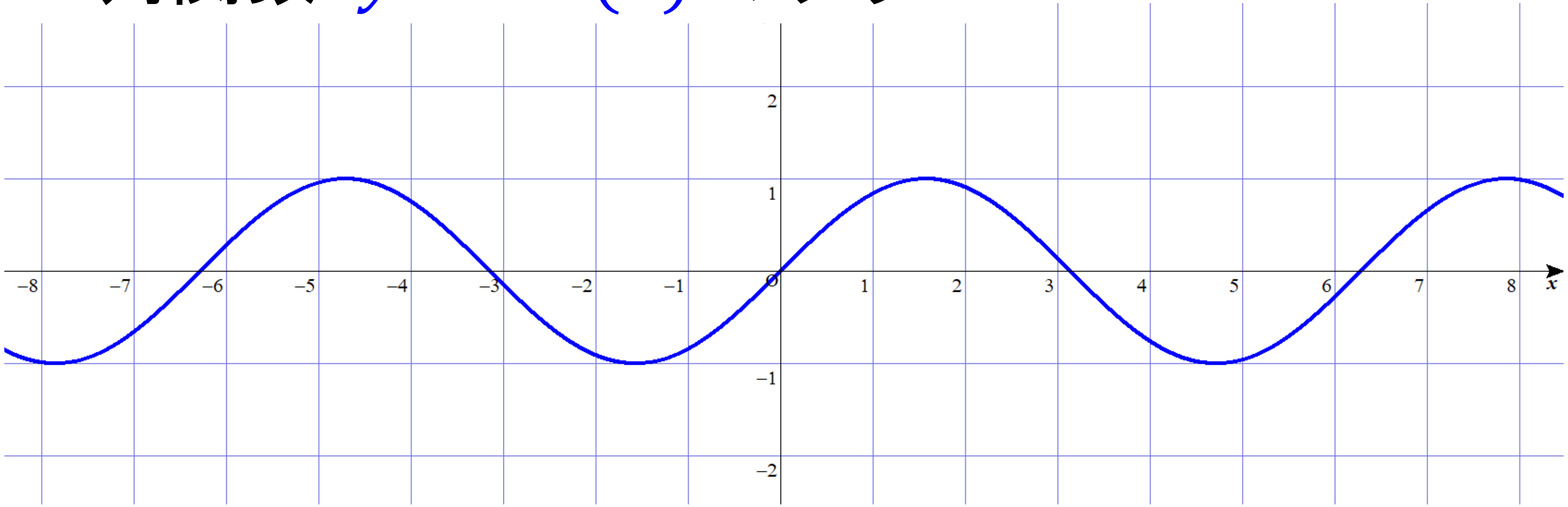
$\sin(0.1) = 0.09983\ldots$

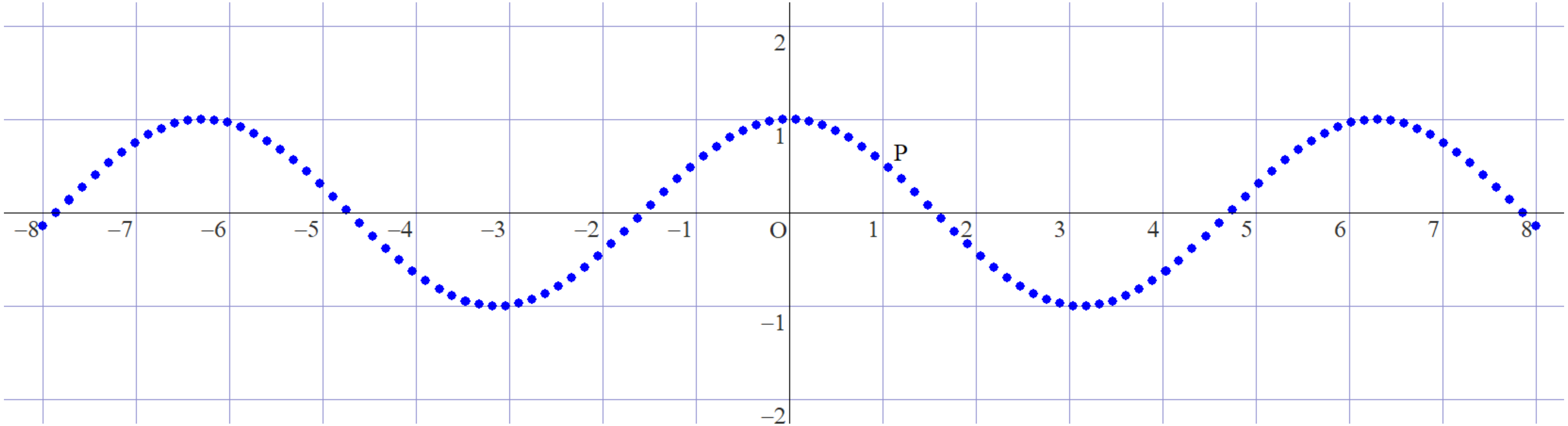
$\sin(0) = 0$

２次関数と同様に関数で与えられる点 $(x, \sin(x))$ を描いてみる（sin_dots.gpp）

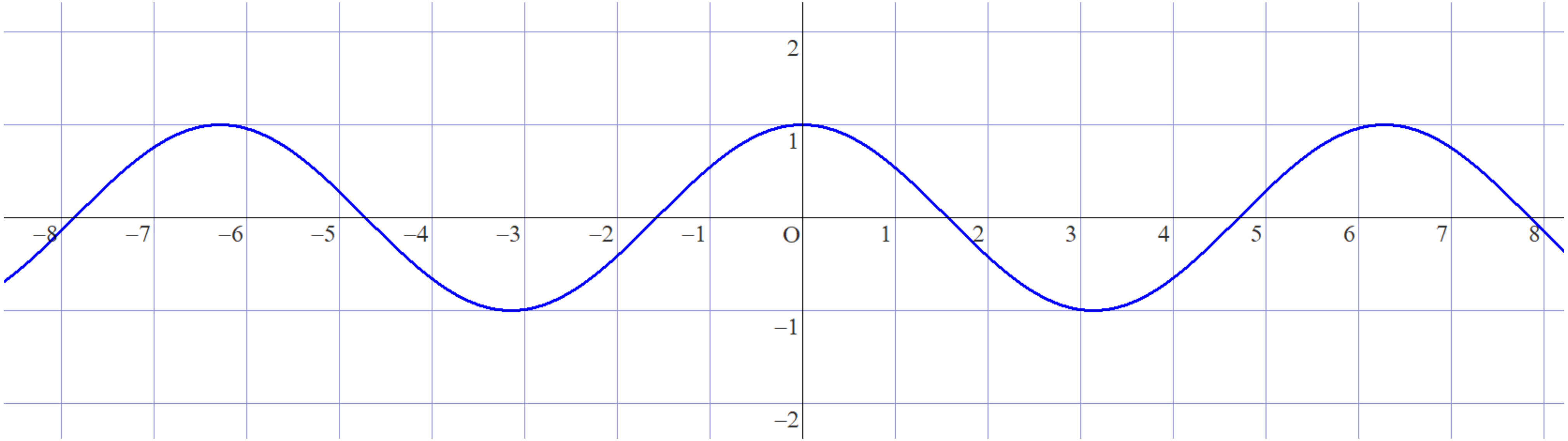


三角関数 $y = \sin(x)$ のグラフ





三角関数 $y = \cos(x)$ のグラフ

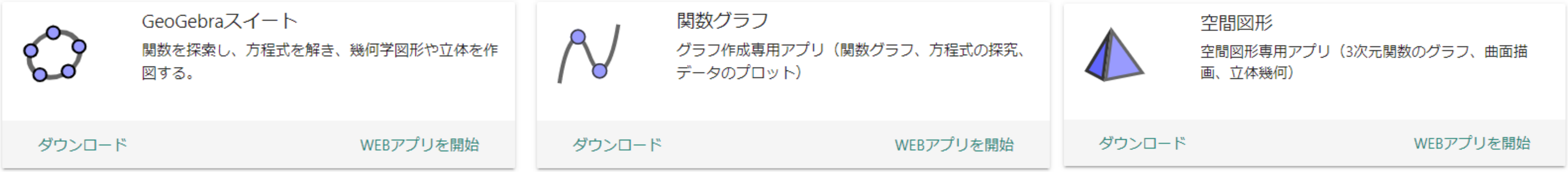


関数のグラフを描く方法

- 電卓・関数電卓（スマホのアプリ）と方眼紙を使う
- グラフを描くためのスマホやタブレット用アプリを利用する

(1) GRAPES（または GRAPES-light）

(2) GeoGebra（GeoGebraスイートや関数グラフ, 空間図形）

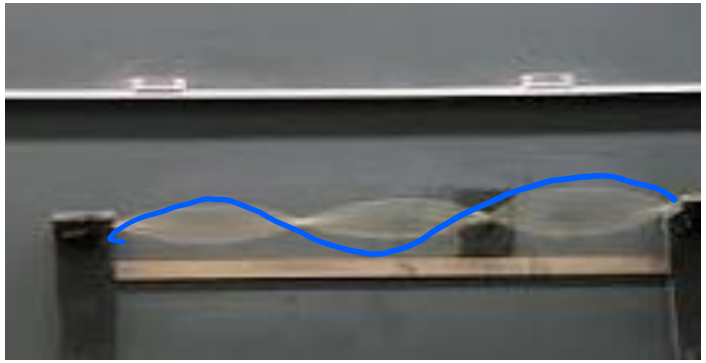


1.4 身近に見られる三角関数のグラフ

- 交流電流
- ばね振り子のおもりの動き
- 心電図
- 地震などの振動

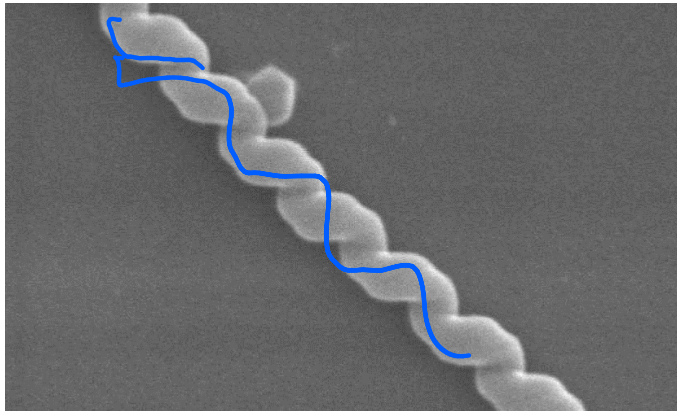
実は、多くの人たちは気づかないが、私たちの身の回りの至る所に三角関数は存在している。

DNA（イメージ画像）

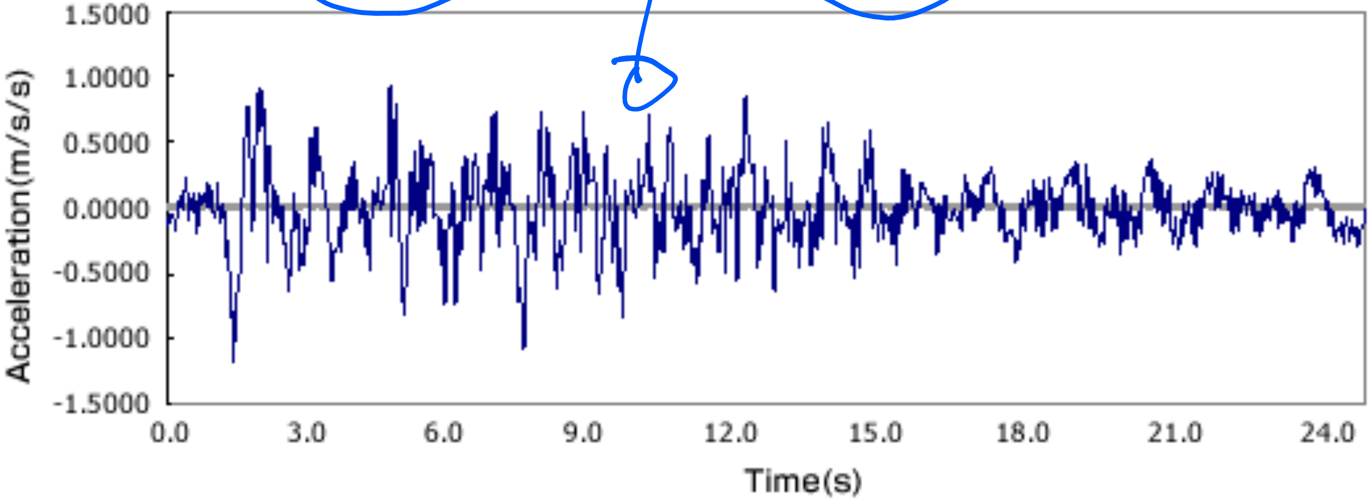


弦の振動

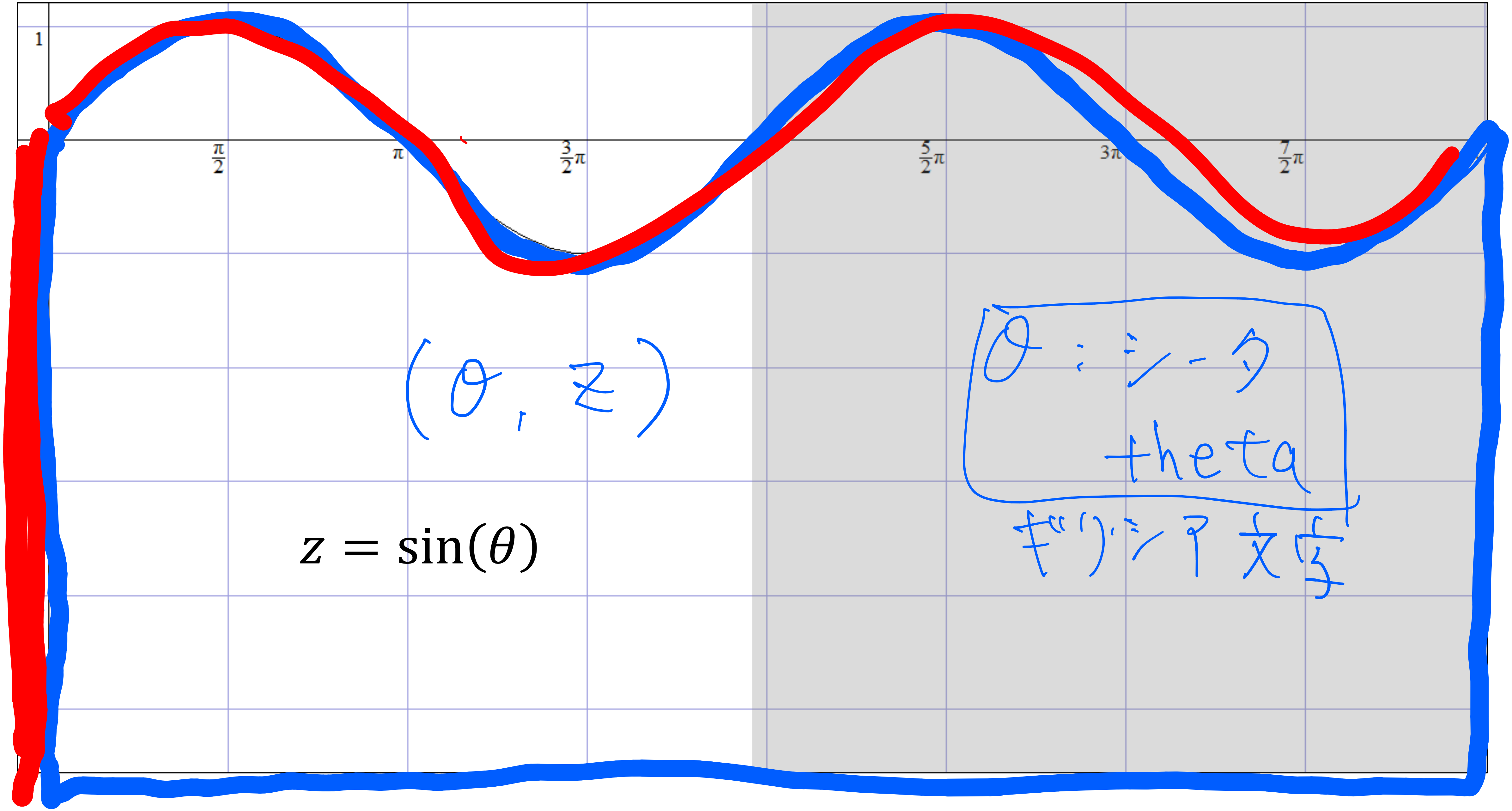
しめ縄



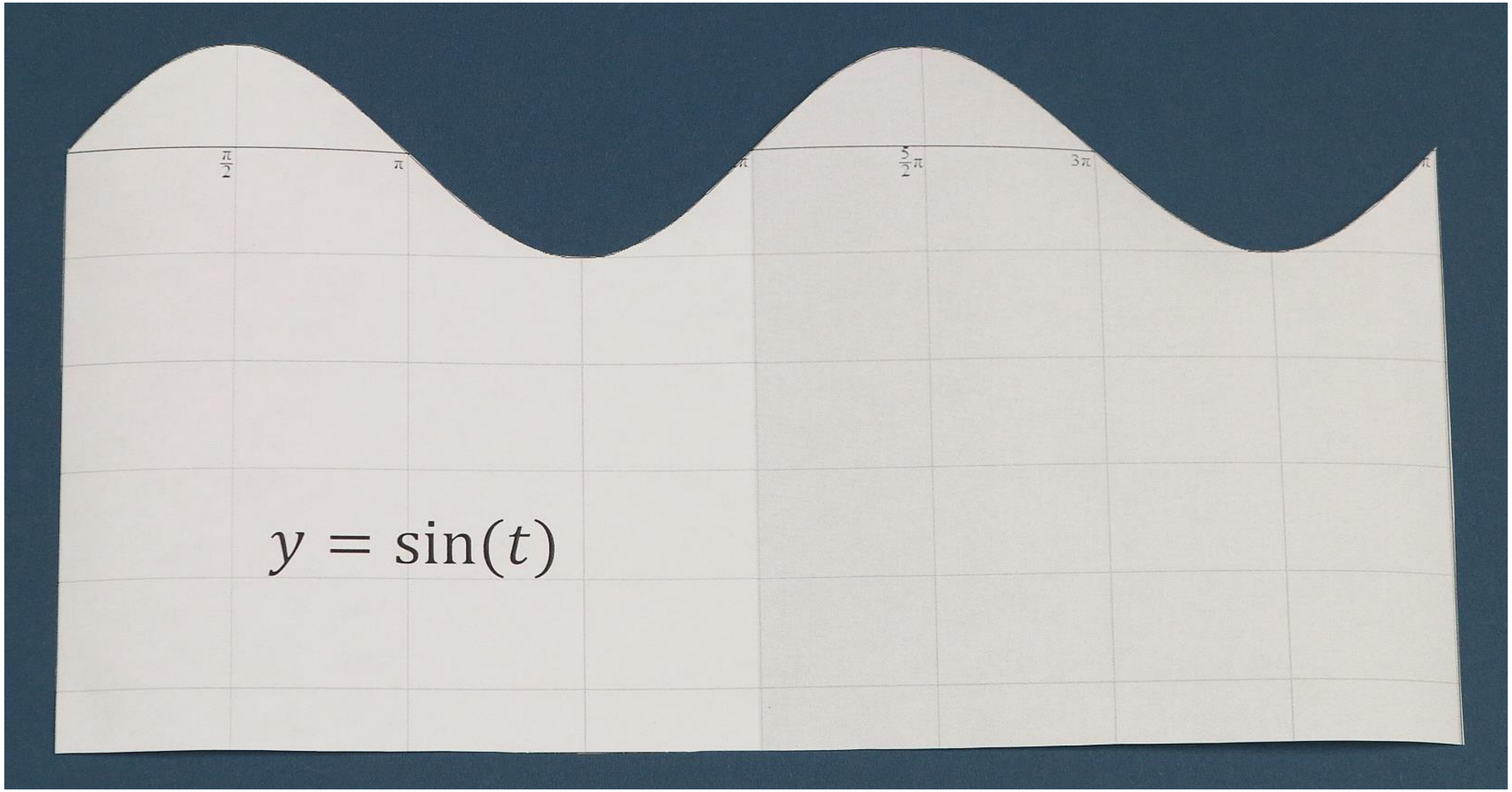
シリカゲルの顕微鏡写真



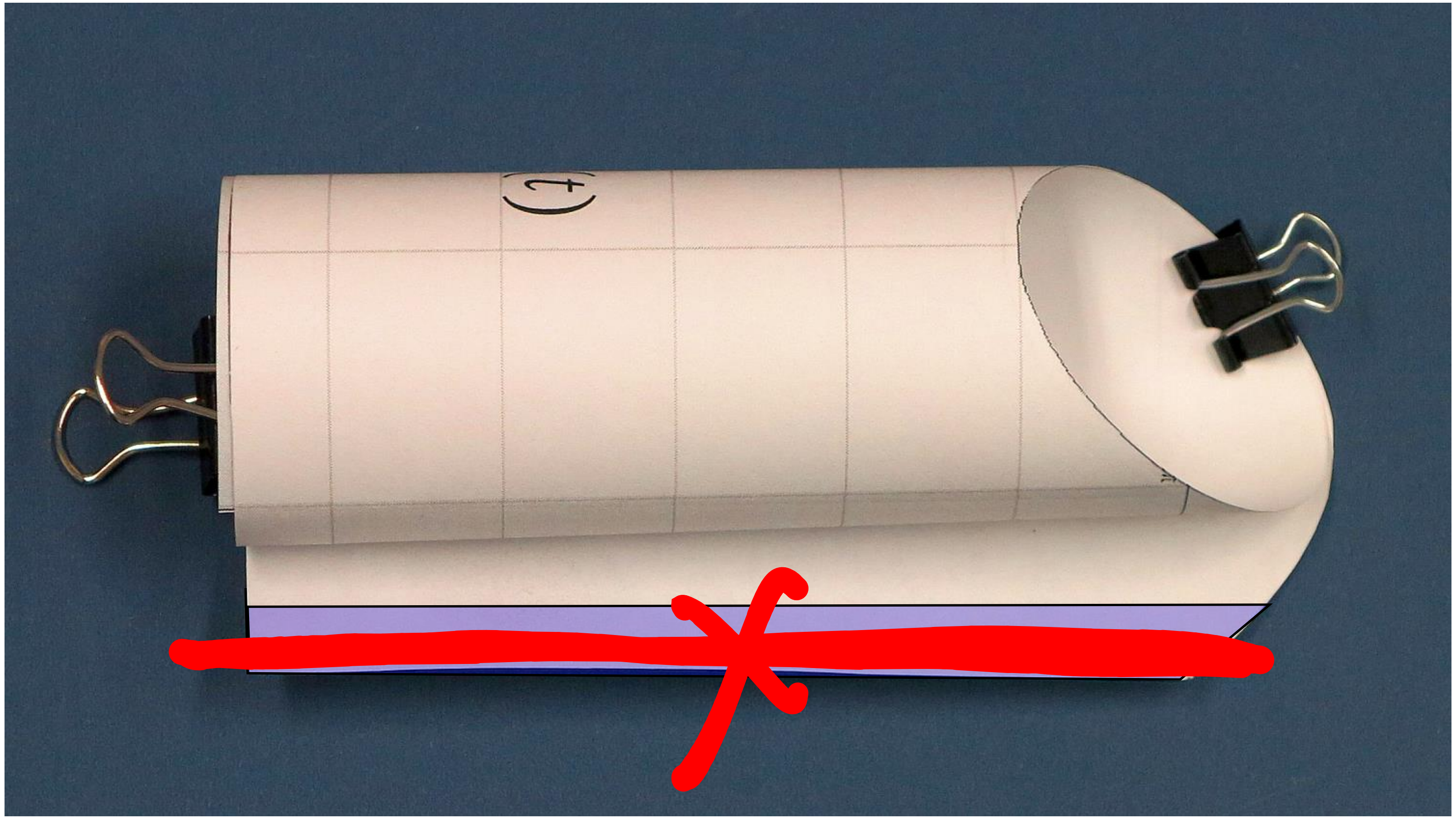
地震の波形


1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{5}{2}\pi$
3π
$\frac{7}{2}\pi$
(θ, z)
θ : シータ
theta
ギリシア文字
$z = \sin(\theta)$

$y = \sin(t)$ の紙を写真のように切り取る。

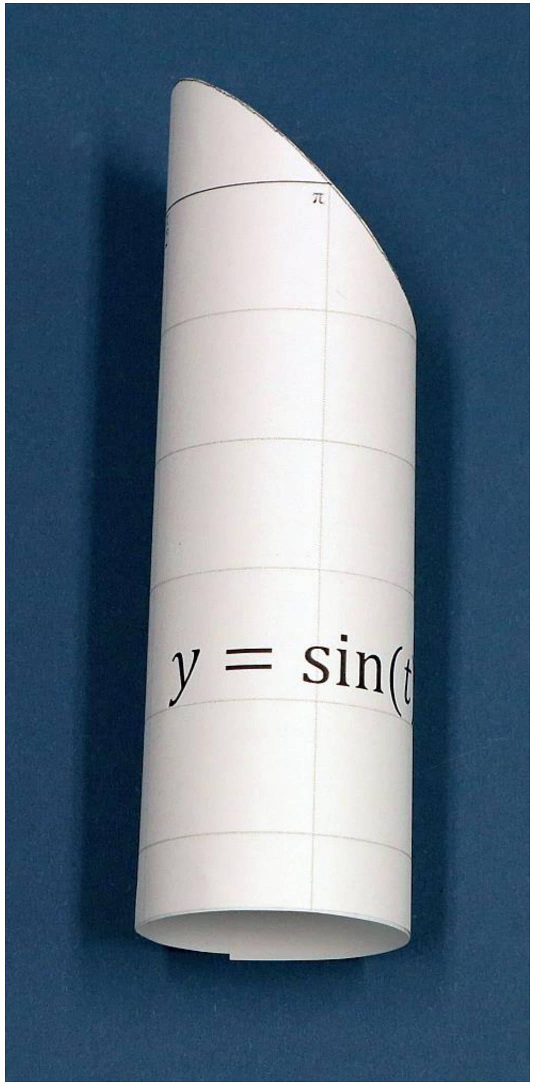


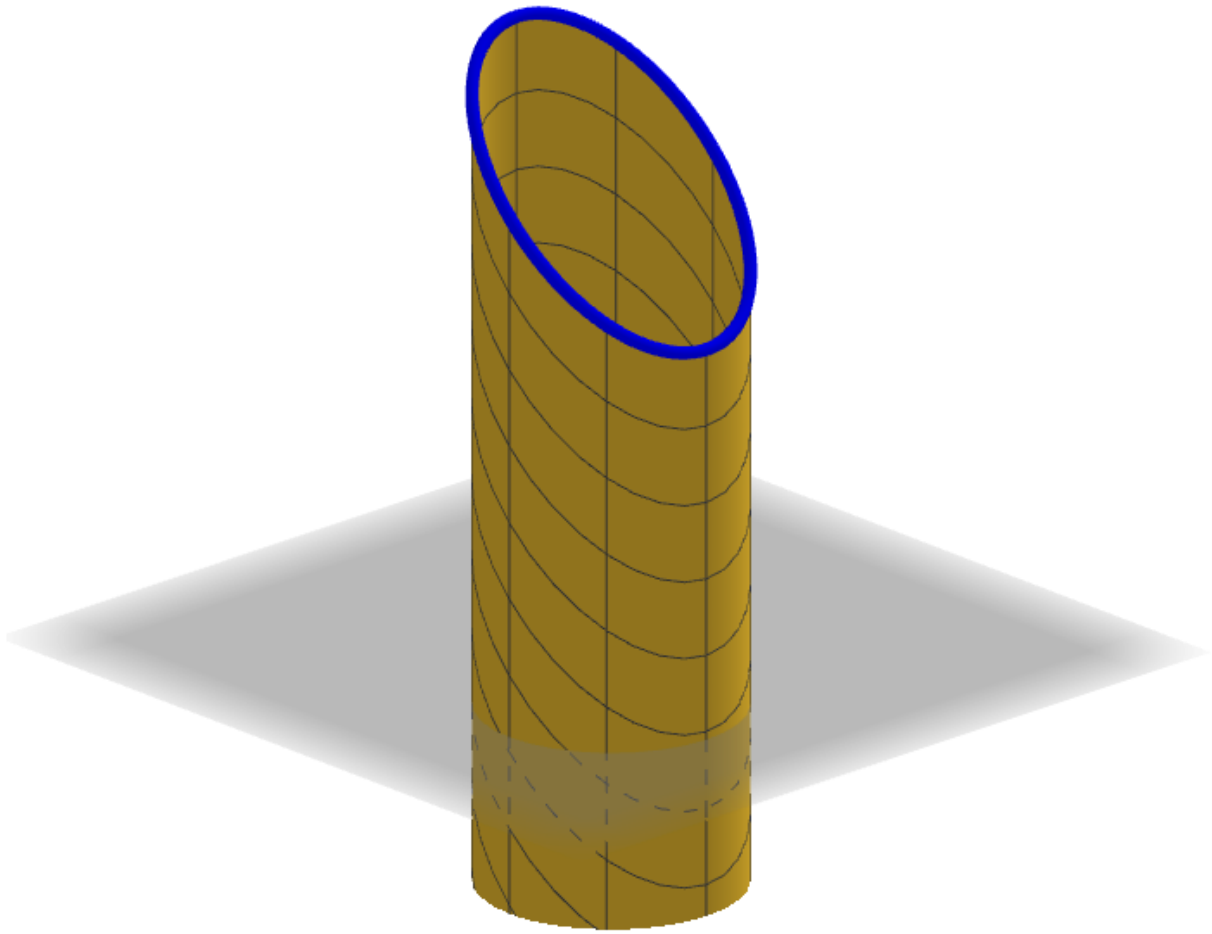
2巻きするように丸めて重なった部分を糊付け、
またはテープで留める。

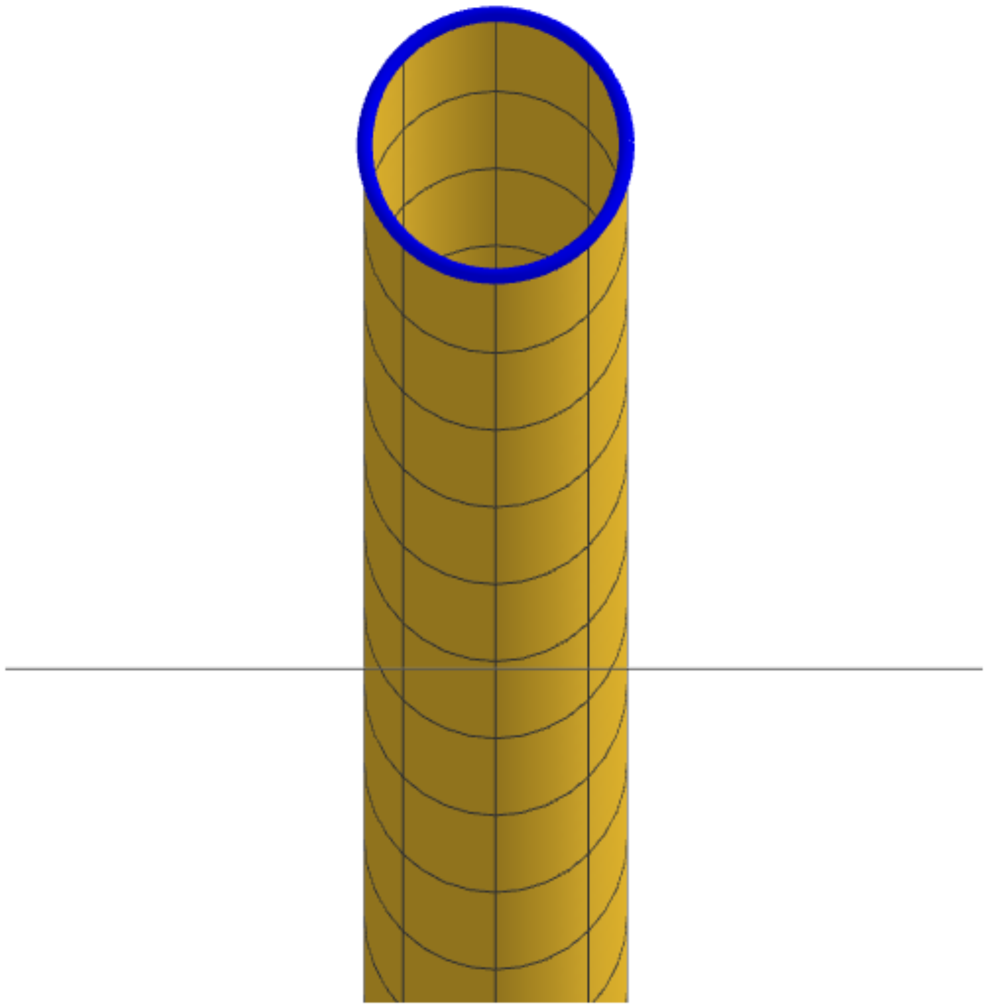


どのような立体が出来上がるか？

円柱を平面で切断した形になる。
すなわち、円柱を平面で切断した立体の展開図は三角関数のグラフで表される。

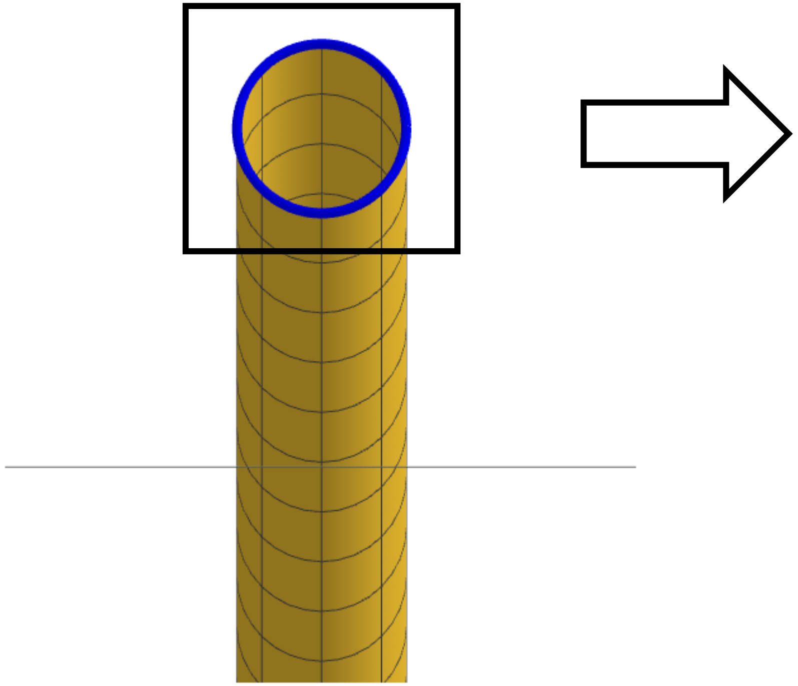


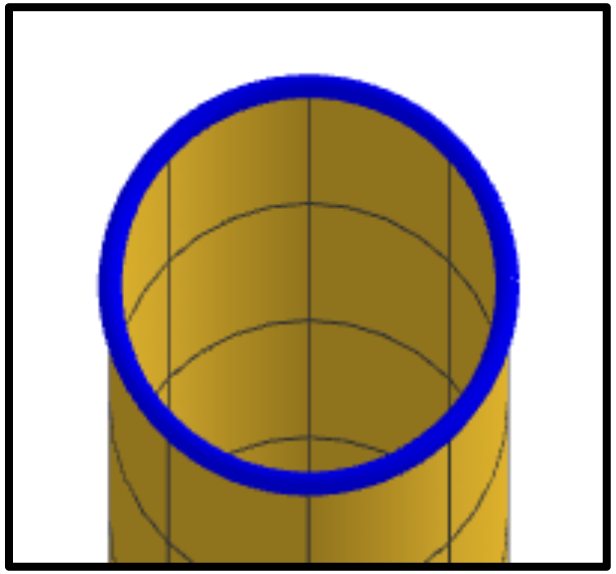




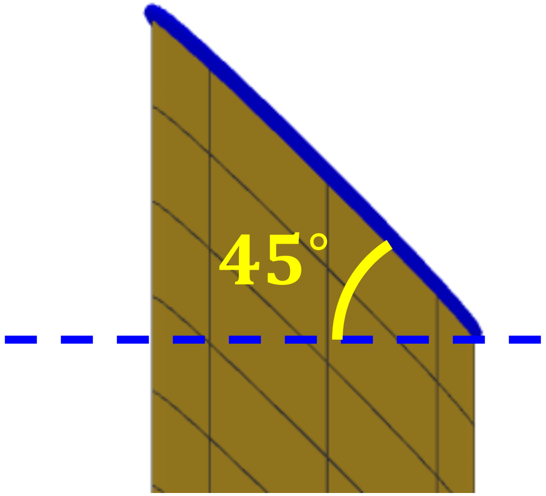
これを真横から眺めると・・・

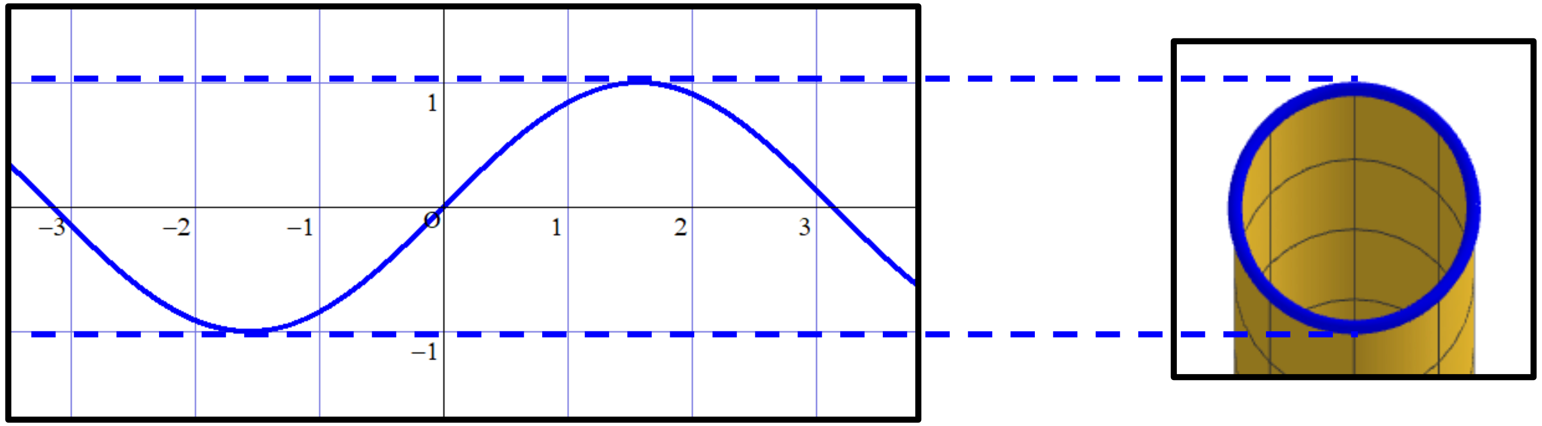
cylinder_cut.ggb





切断面は半径１の円





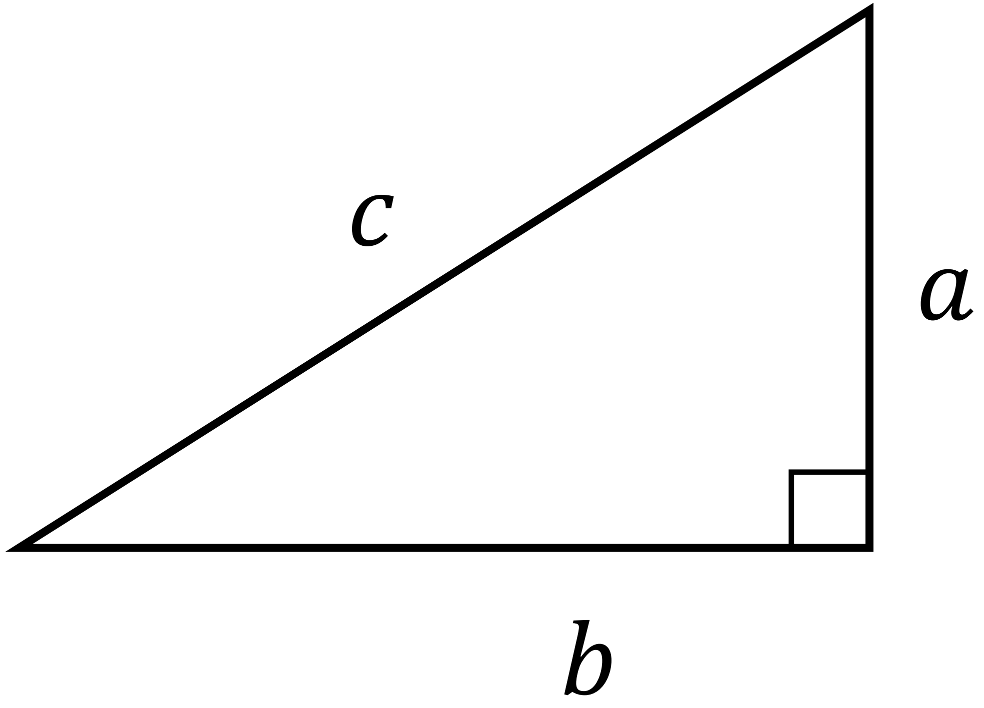
2. 直角三角形と三角関数

2.1 三平方の定理(ピタゴラスの定理)

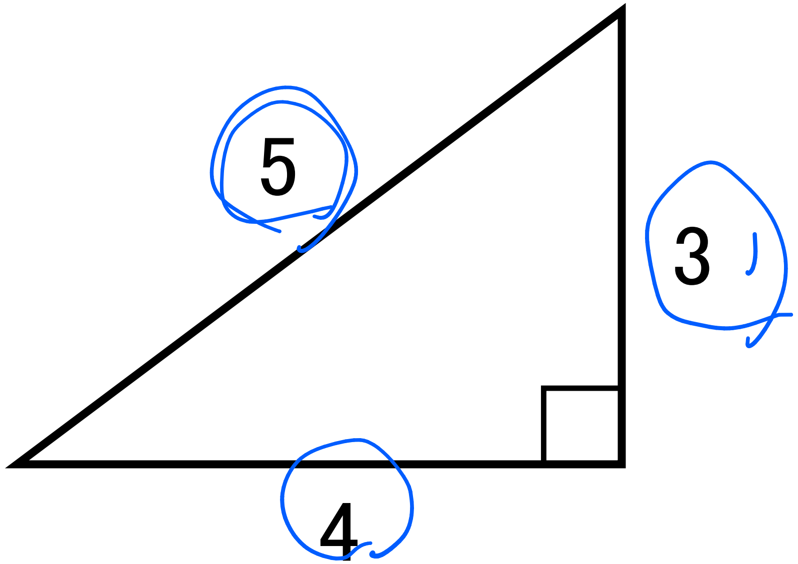
三平方の定理(ピタゴラスの定理)

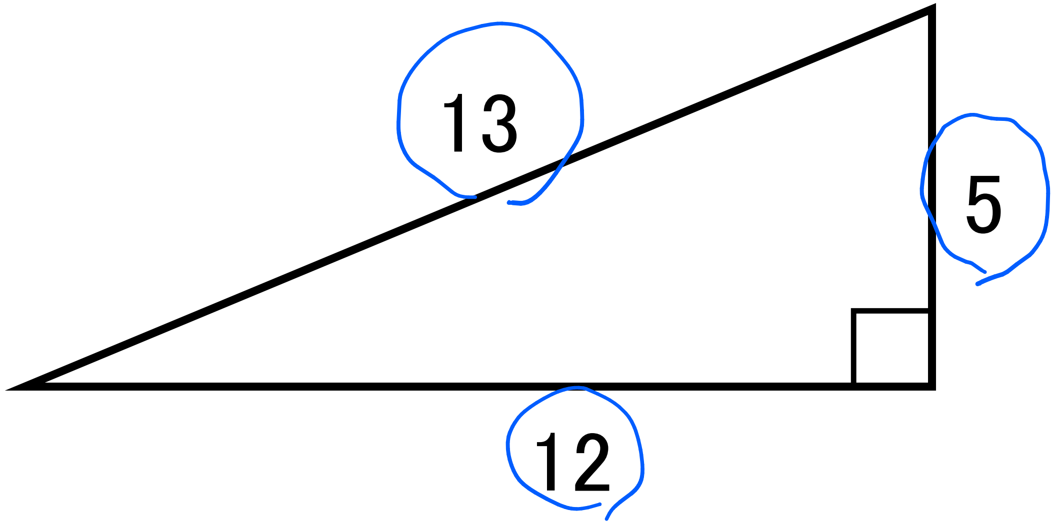
右図の直角三角形において
次の等式が成り立つ。

$$a^2 + b^2 = c^2$$



三平方の定理

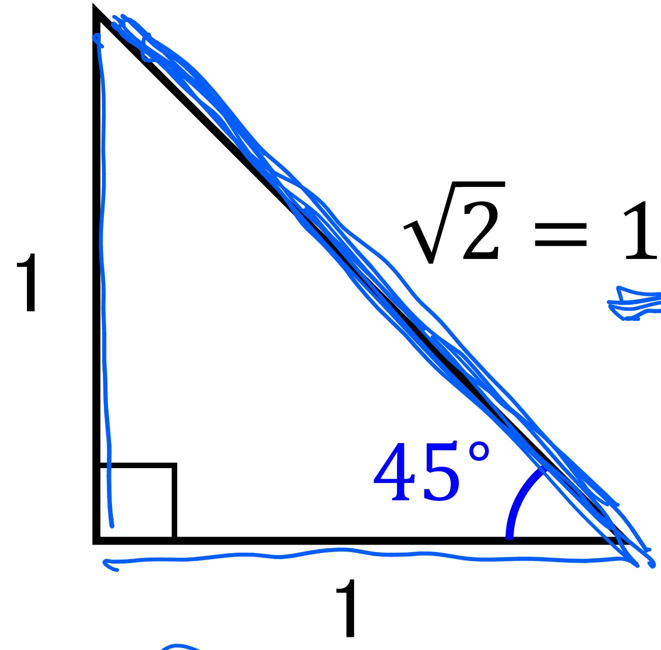




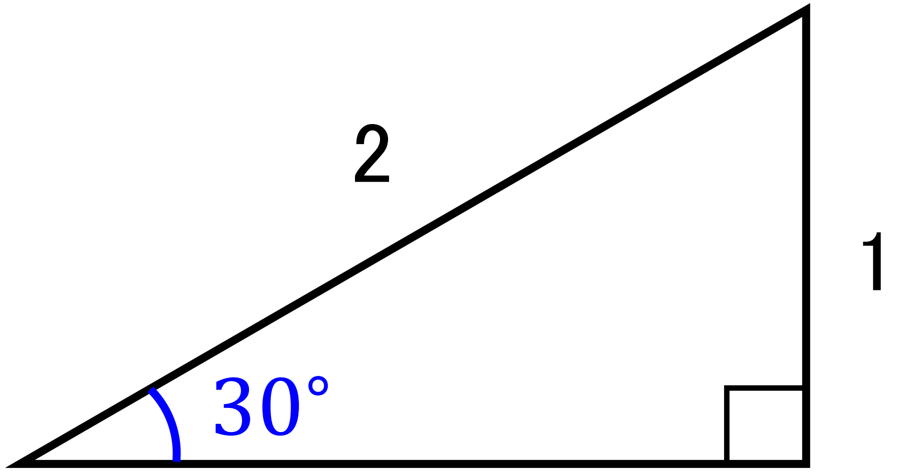
$$3^2+4^2=5^2$$
$$(9+16=25)$$

$$5^2+12^2=13^2$$
$$(25+144=169)$$

三平方の定理



$\sqrt{2} = 1.414\cdots$



$1.732\cdots = \sqrt{3}$

$\bigcirc \times \bigcirc = 2$

$1.5 \times 1.5 = 2.25$

$1.4 \times 1.4 = 1.96$

$1.41 \times 1.41 = 1.9881$

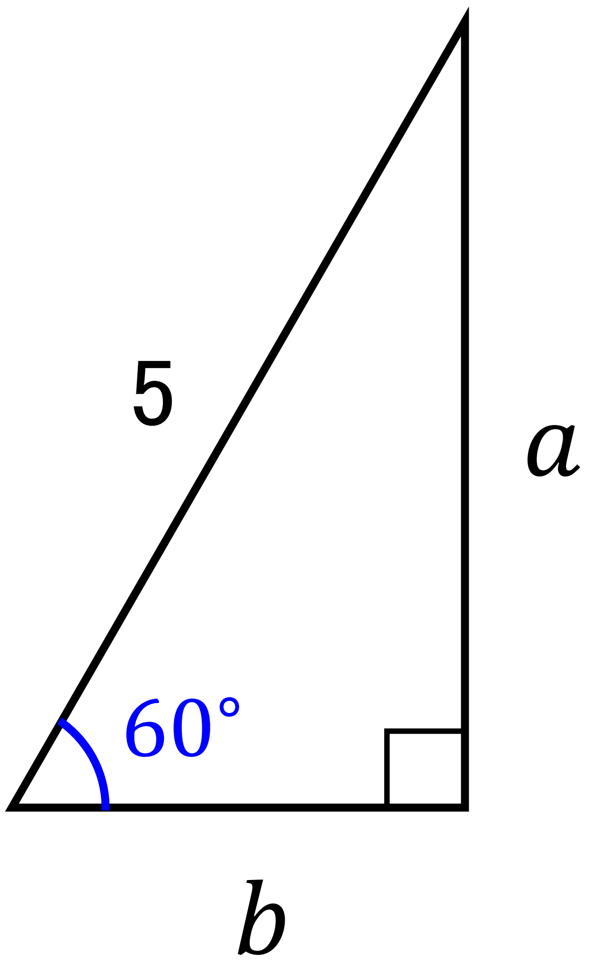
$$1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2$$

$$(1 + 1 = 2)$$

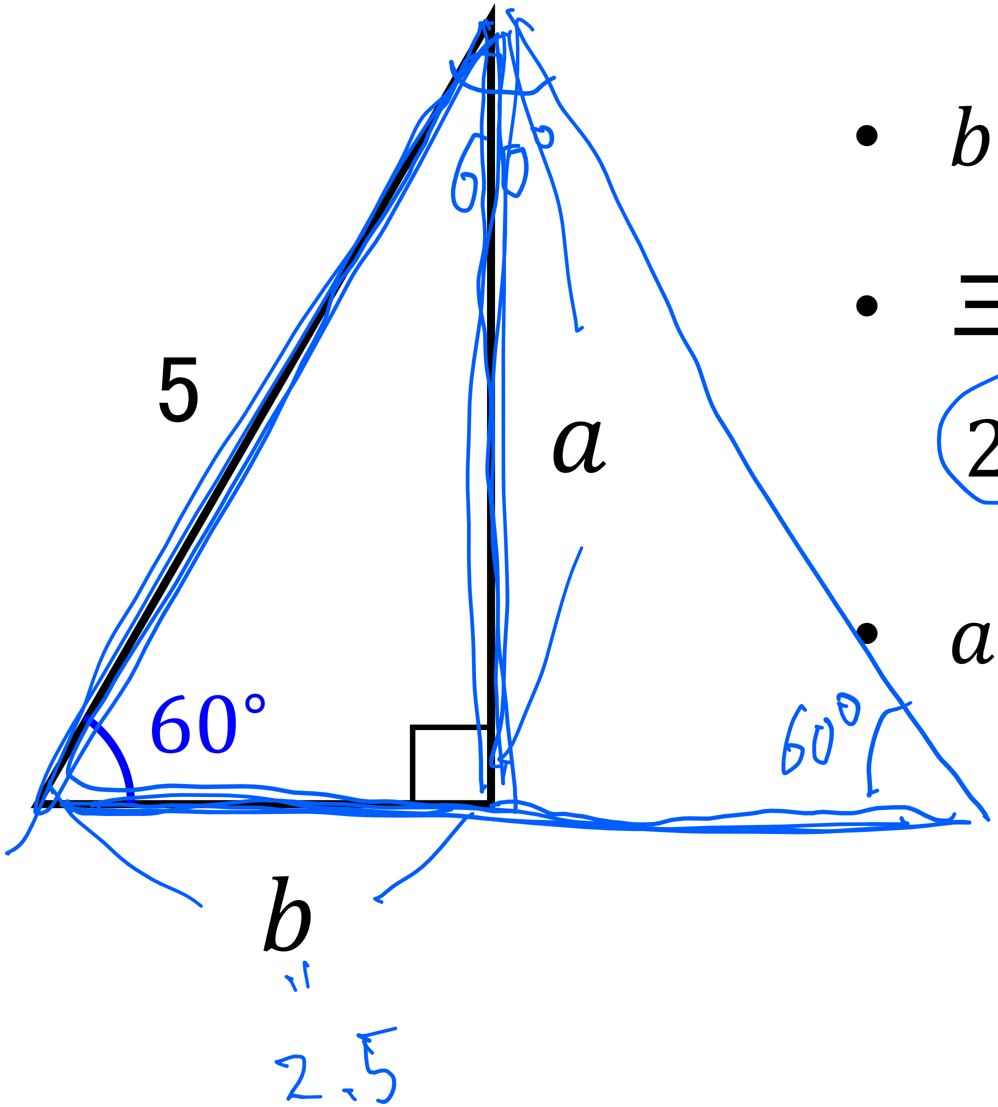
$$1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$$

$$(1 + 3 = 4)$$

【問題】下図の辺の長さ a , b を求めよ。



【問題】下図の辺の長さa , bを求めよ。



- $b = 5 \div 2 = 2.5$
- 三平方の定理より

$2.5^2 + a^2 = 5^2 \Leftrightarrow a^2 = 18.75$

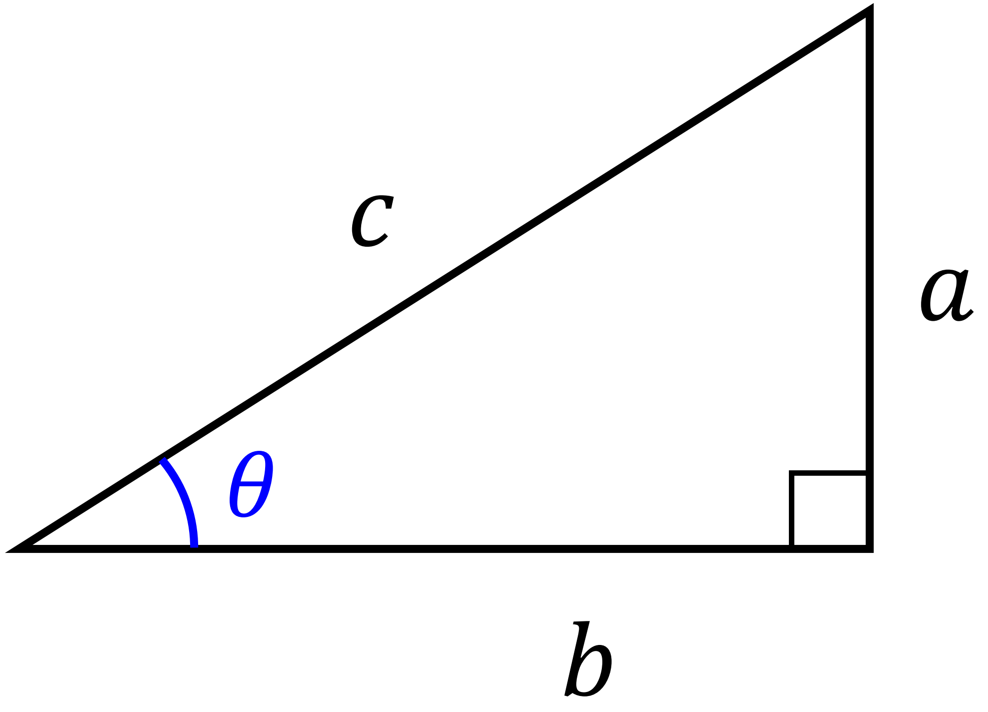
- $a = \sqrt{18.75} = 4.3301\cdots$

2.2 三角比

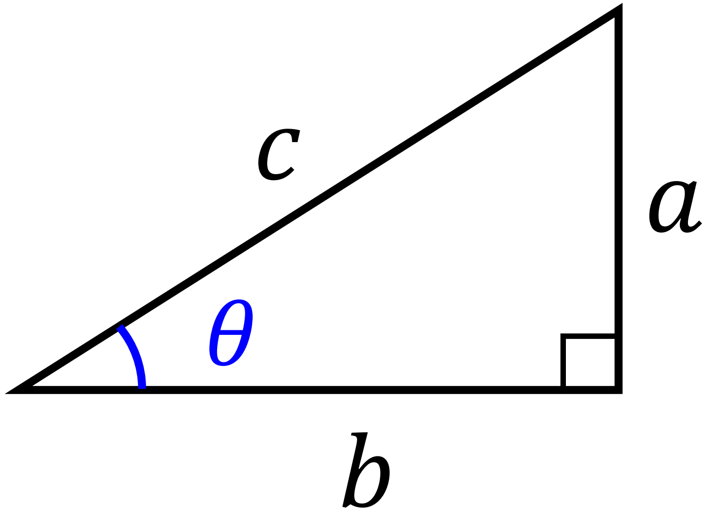
右図の直角三角形において、辺の長さの比は三角関数を用いて次のように表される。

$$\overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\theta) = \frac{a}{c} \qquad \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\theta) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{a}{b}$$

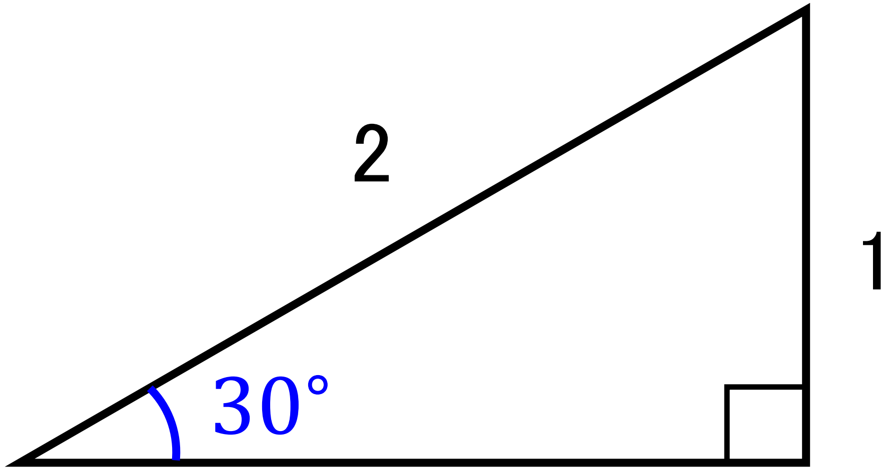


θ (theta) は Rad ではなく Deg であることに注意



$$\overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\theta) = \frac{a}{c} \qquad \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\theta) = \frac{b}{c}$$

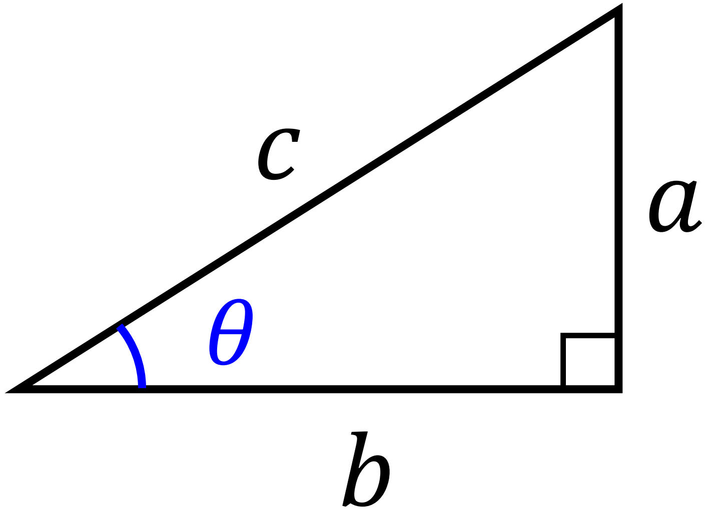
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{a}{b}$$



$$1.732\cdots = \sqrt{3}$$

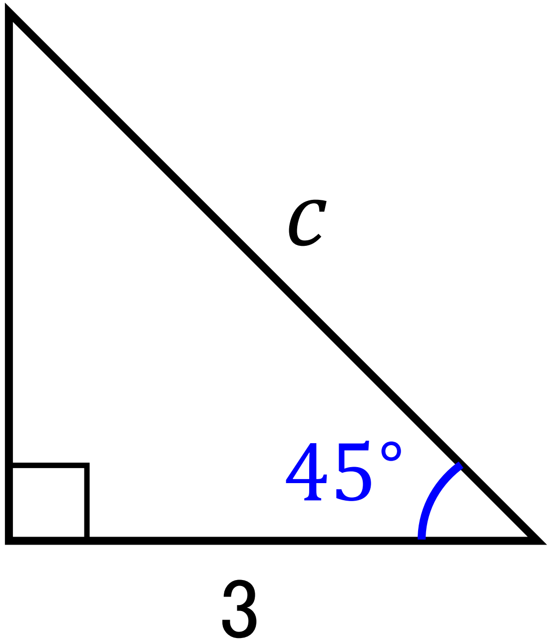
$$\cos 30° = \frac{1.732\cdots}{2} = 0.8660\cdots$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0.5$$



$$\overset{\text{sin}}{\cancel{\cos}}(\theta) = \frac{a}{c} \qquad \overset{\text{cos}}{\cancel{\sin}}(\theta) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{a}{b}$$

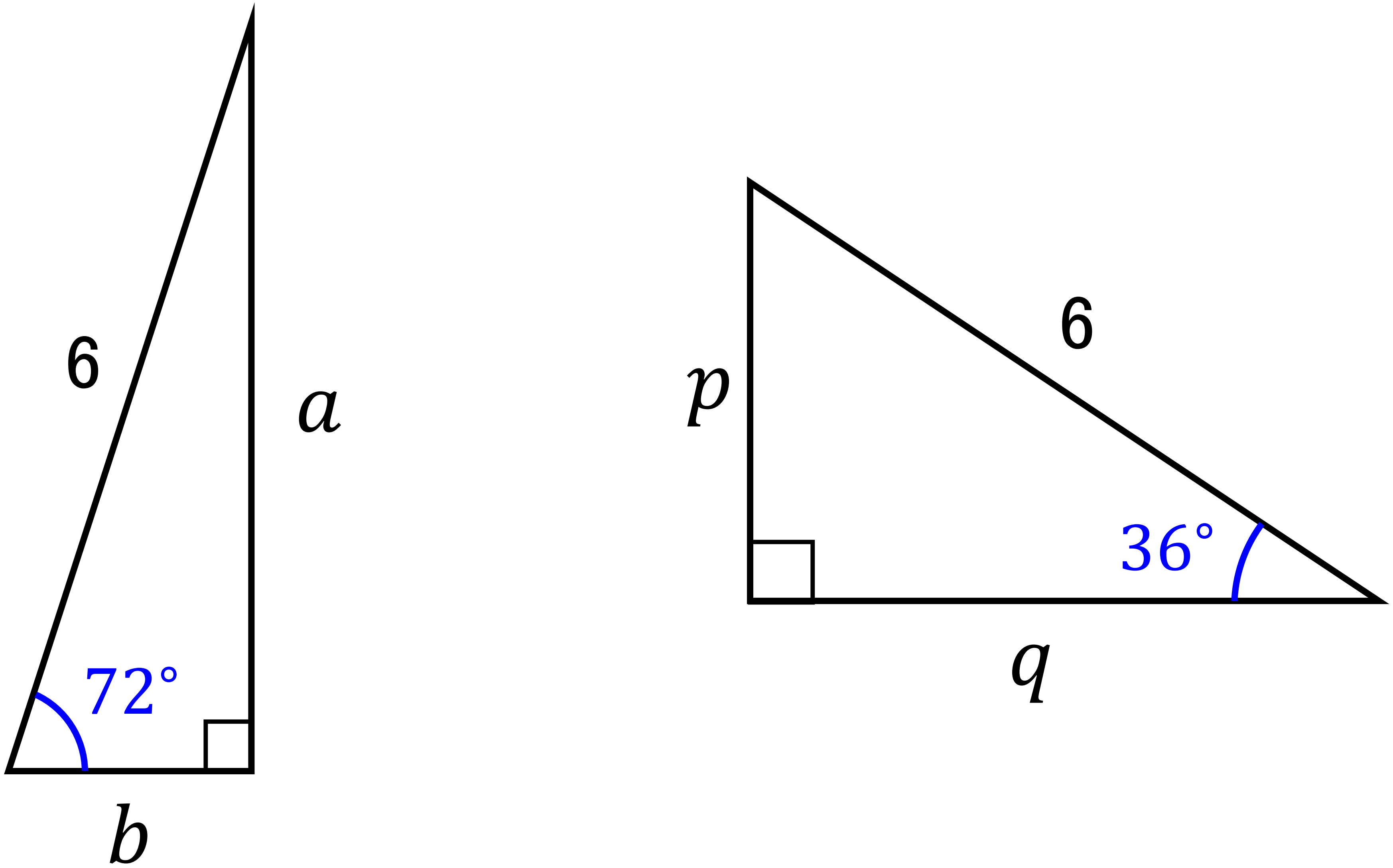


$$\cos 45^\circ = \frac{3}{c} \iff c = 3 \div \cos 45^\circ$$

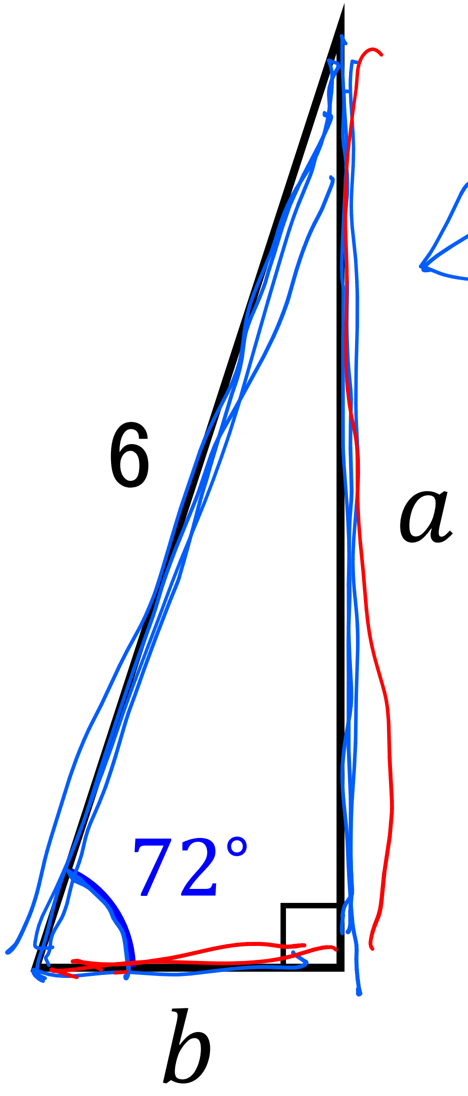
$$= 3 \div 0.7071\cdots$$

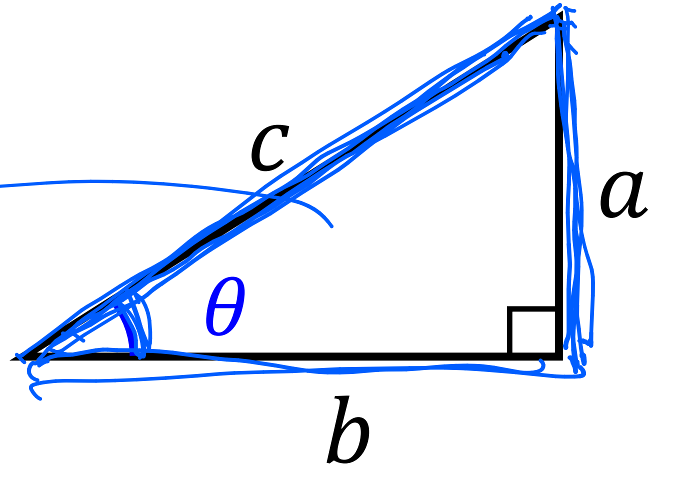
$$= 4.242\cdots$$

【問題】下図の辺の長さ a, b, p, q を求めよ。



【問題】辺の長さ a, b を求めよ。





sin
$$\cancel{\cos}(\theta) = \frac{a}{c}$$

cos
$$\cancel{\sin}(\theta) = \frac{b}{c}$$

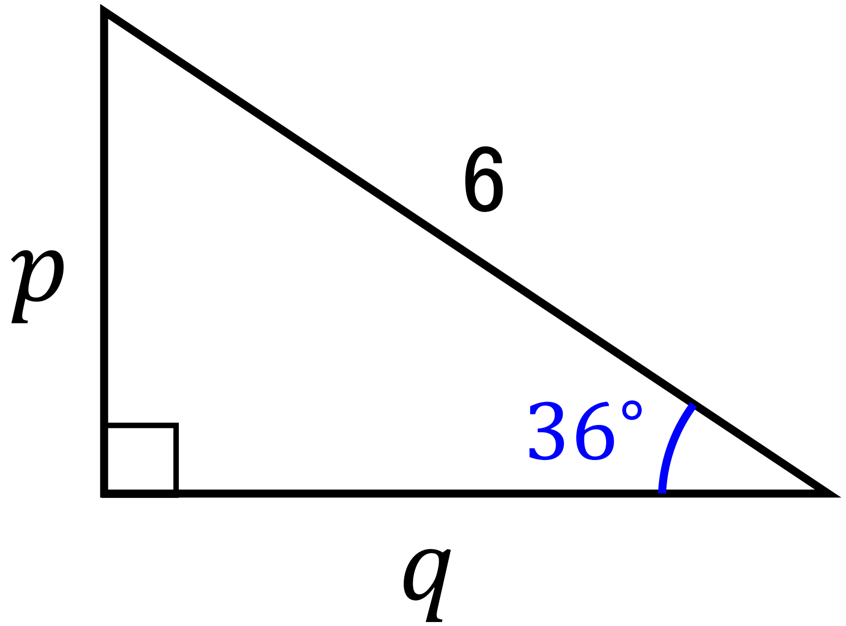
$$\frac{a}{6} = \sin 72^\circ = 0.951\cdots$$

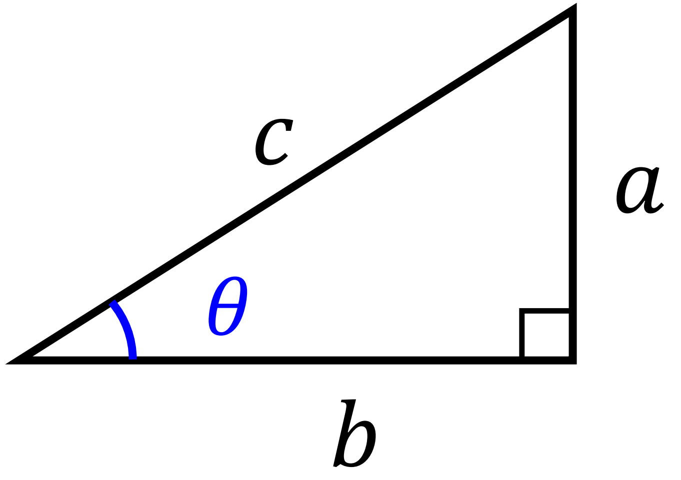
$$\Rightarrow \quad a = 6 \times 0.951\cdots = 5.706\cdots$$

$$\frac{b}{6} = \cos 72^\circ = 0.309\cdots$$

$$\Rightarrow \quad b = 6 \times 0.309\cdots = 1.854\cdots$$

【問題】辺の長さp, qを求めよ。





sin
$$\cancel{\cos}(\theta) = \frac{a}{c}$$

cos
$$\cancel{\sin}(\theta) = \frac{b}{c}$$

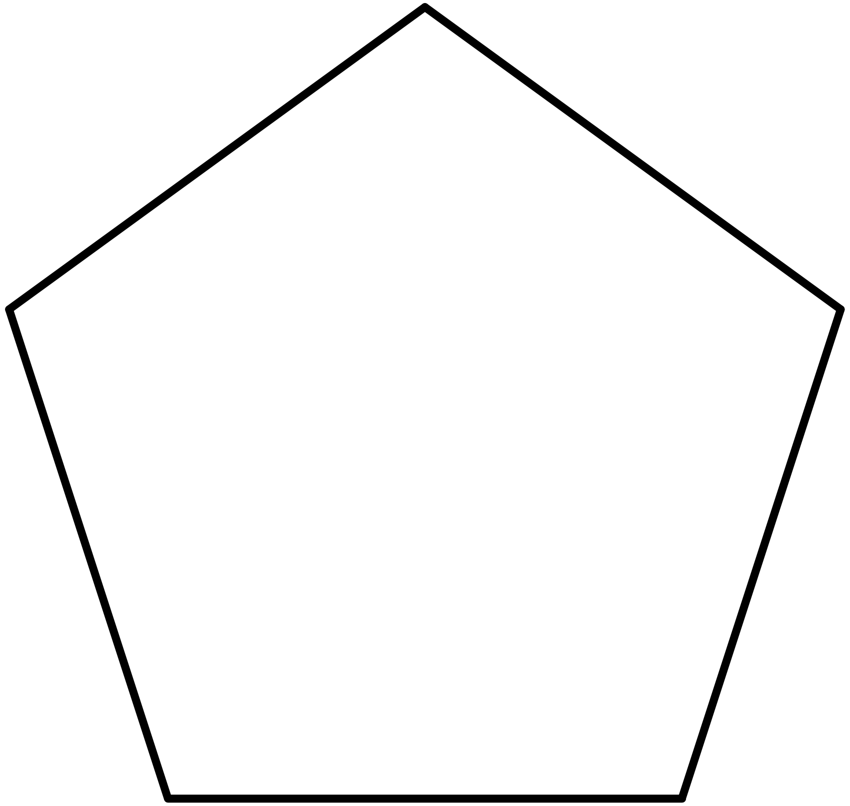
$$\frac{p}{6} = \sin 36^\circ = 0.587\cdots \quad \Rightarrow \quad p = 6 \times 0.587\cdots = 3.526\cdots$$

$$\frac{q}{6} = \cos 36^\circ = 0.809\cdots \quad \Rightarrow \quad q = 6 \times 0.809\cdots = 4.854\cdots$$

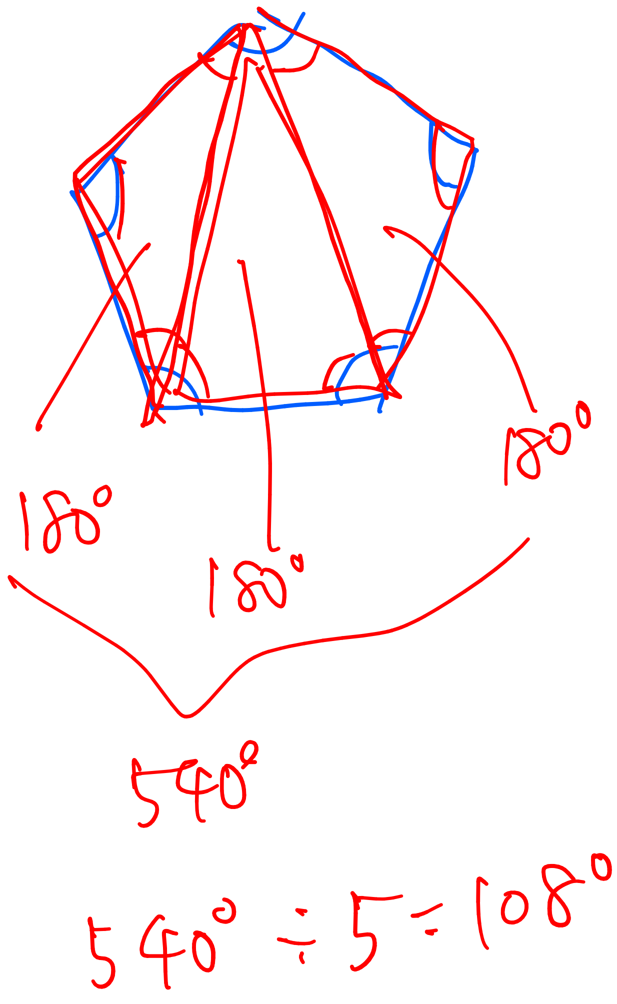
2.3 正五角形を描く

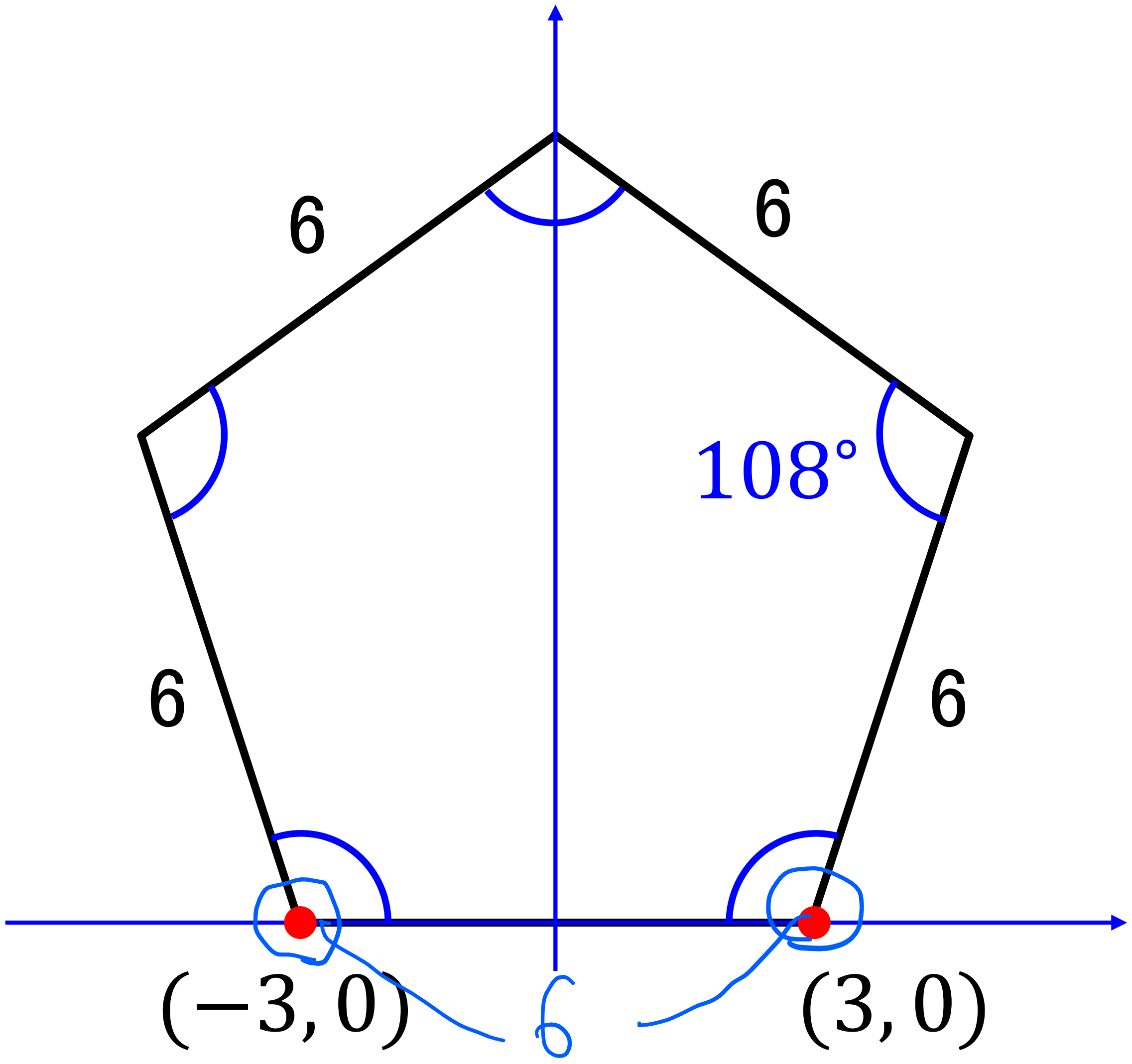
できるだけ正確に正五角形を描くにはどうすればよいか？

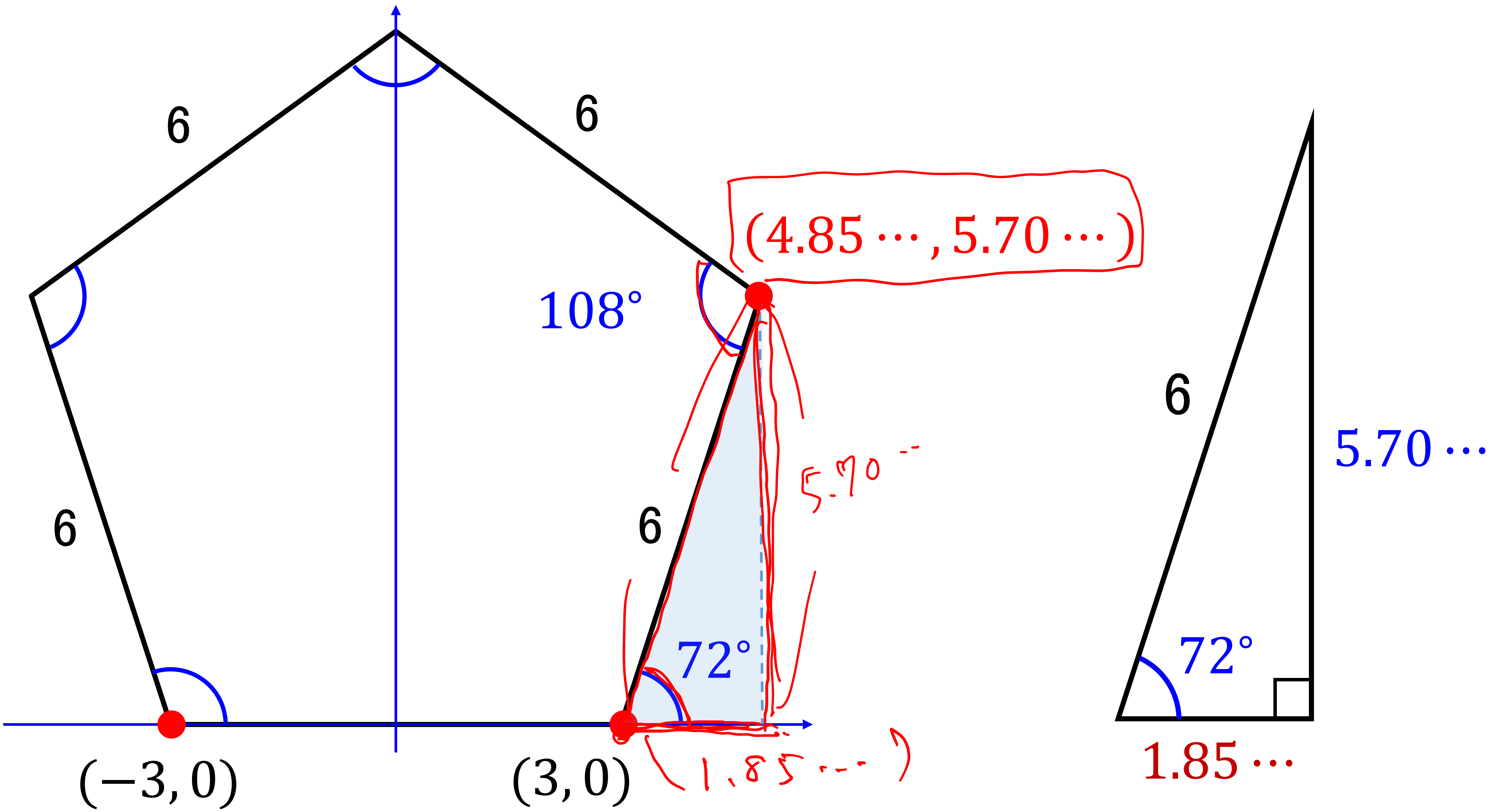
- 正三角形や正方形、正六角形はコンパスと定規を使って簡単に描けるが、正五角形を正確に描くのは容易ではない。
- 正五角形は作図可能な多角形なので、理論的にはコンパスと定規だけで描くことはできる。

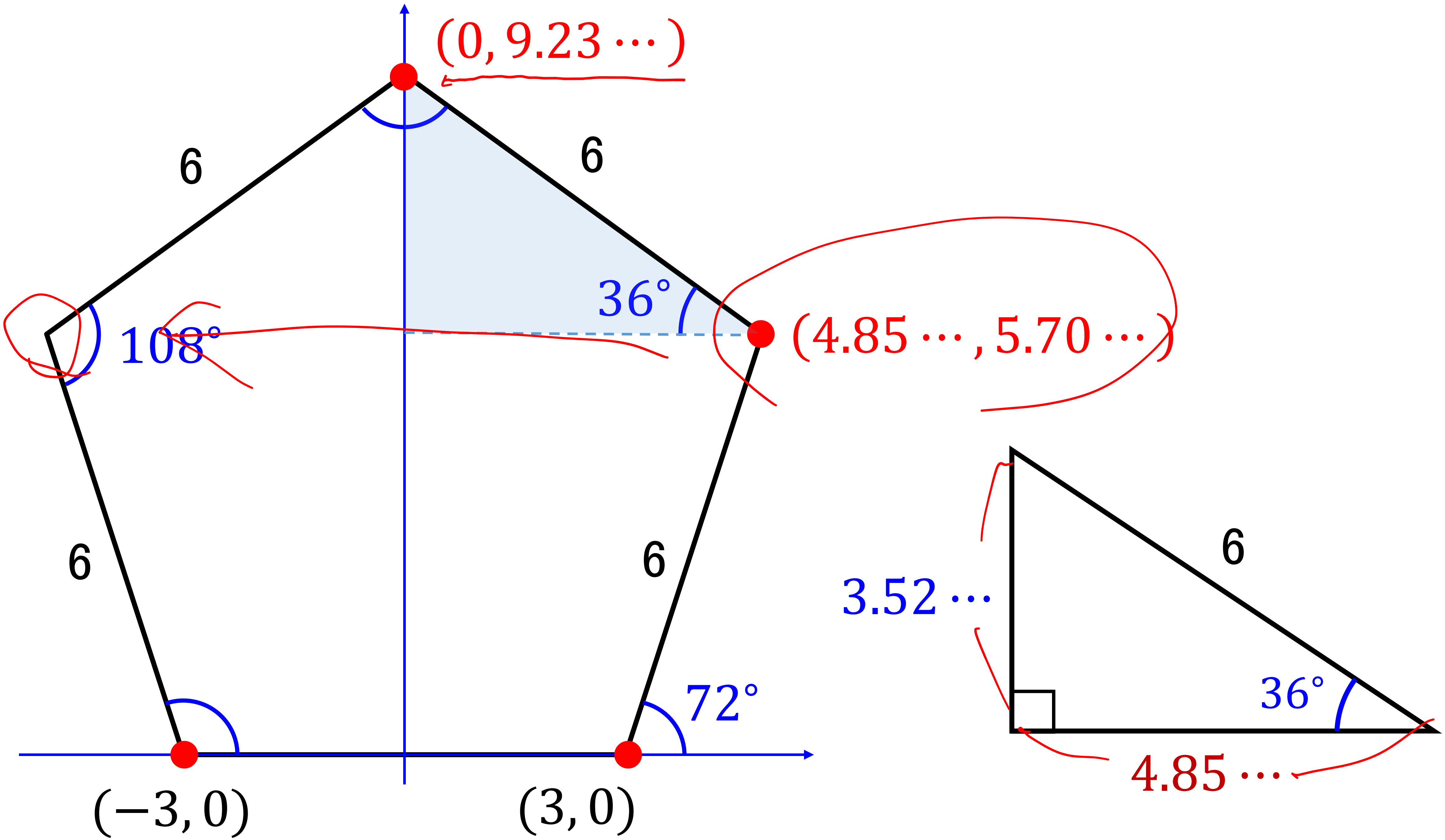


三角関数･三角比を応用して一辺の長さが 6cm の正五角形を描く

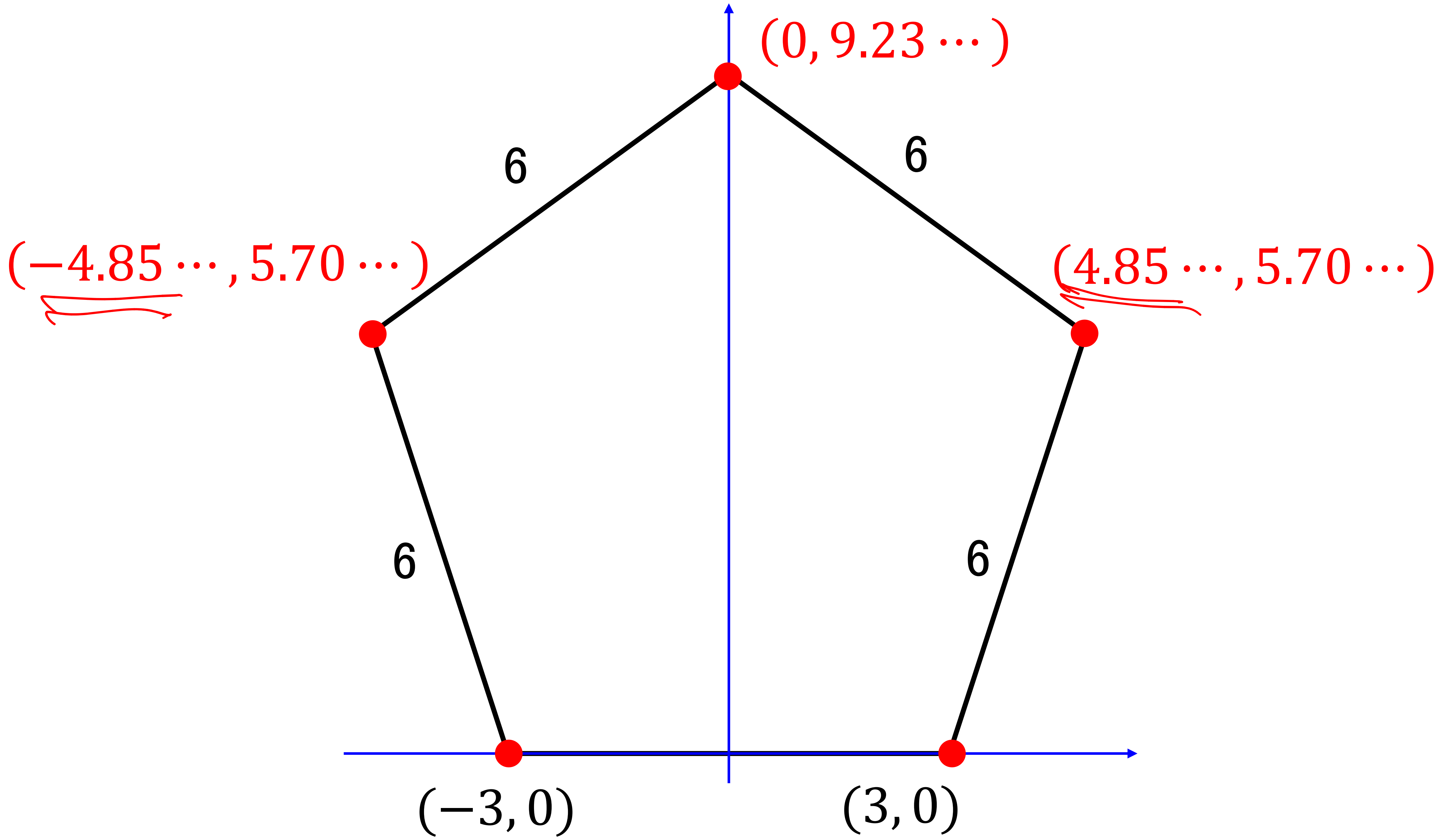





6
6
6
6
108°
72°
(4.85…, 5.70…)
5.70…
1.85…
(−3, 0)
(3, 0)
6
5.70…
72°
1.85…

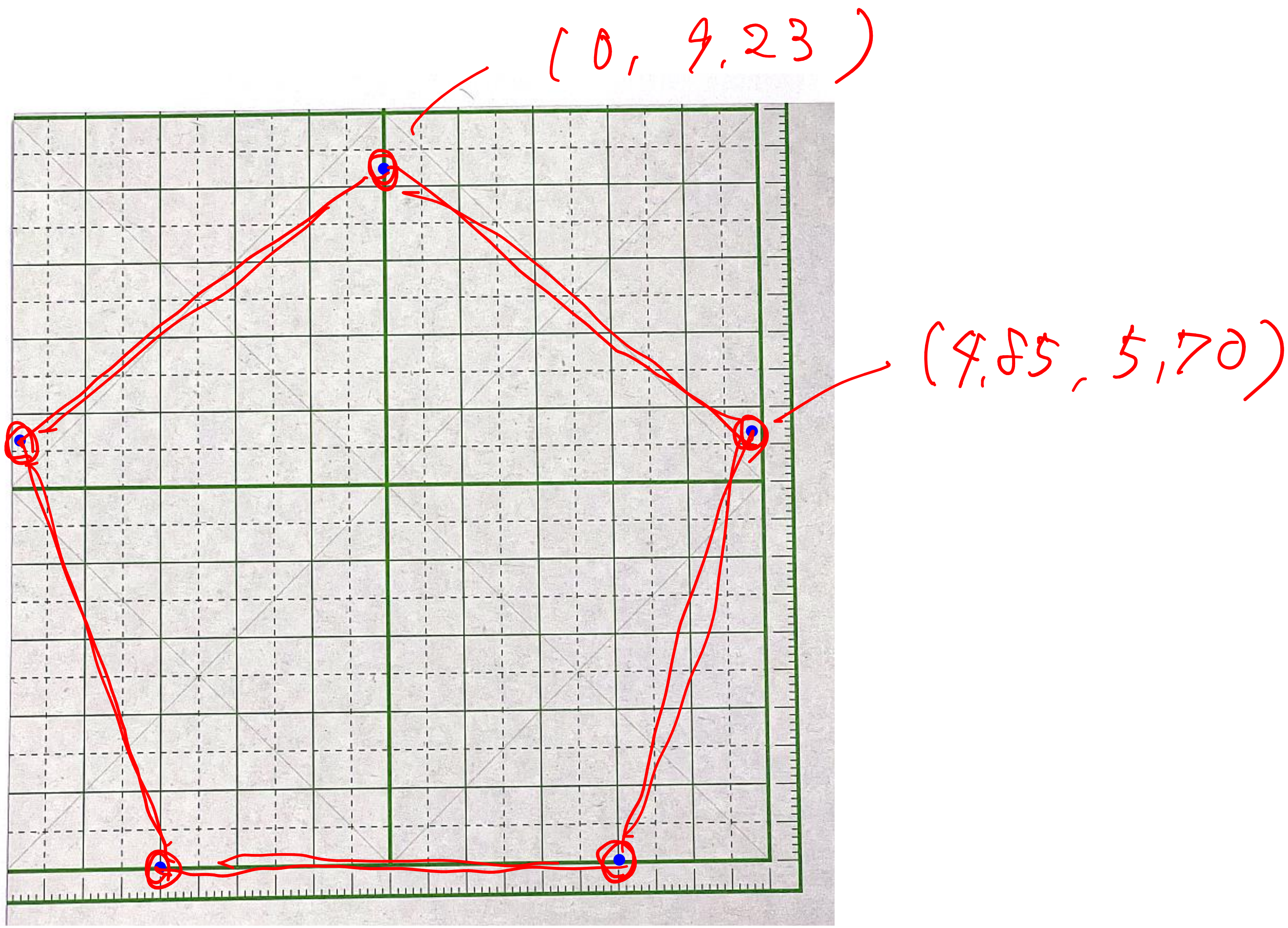


(0, 9.23 ⋯)
6
6
36°
108°
(4.85 ⋯ , 5.70 ⋯)
6
6
72°
(−3, 0)
(3, 0)
6
3.52 ⋯
36°
4.85 ⋯



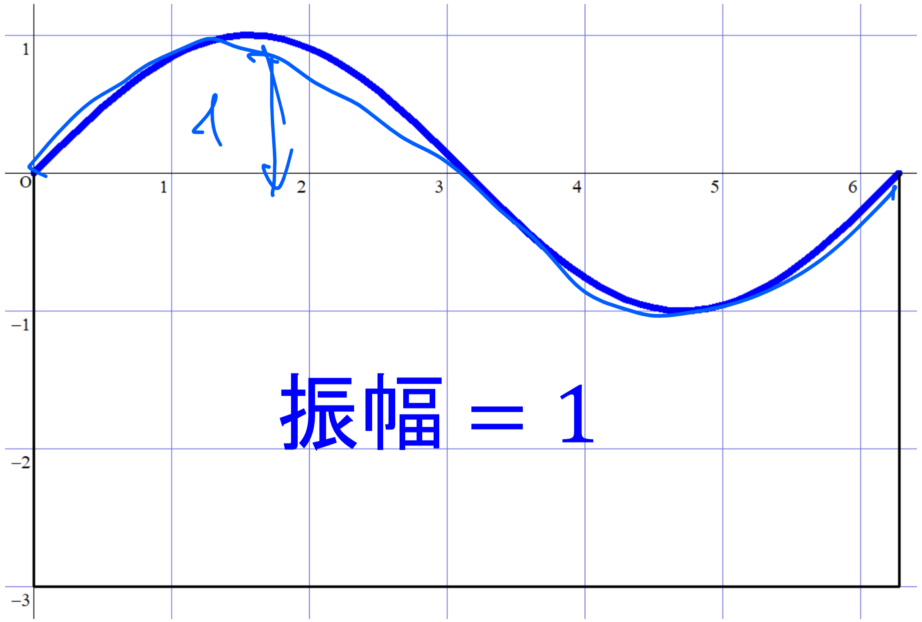
$(0, 9.23\cdots)$
6
6
$(-4.85\cdots, 5.70\cdots)$
$(4.85\cdots, 5.70\cdots)$
6
6
$(-3, 0)$
$(3, 0)$

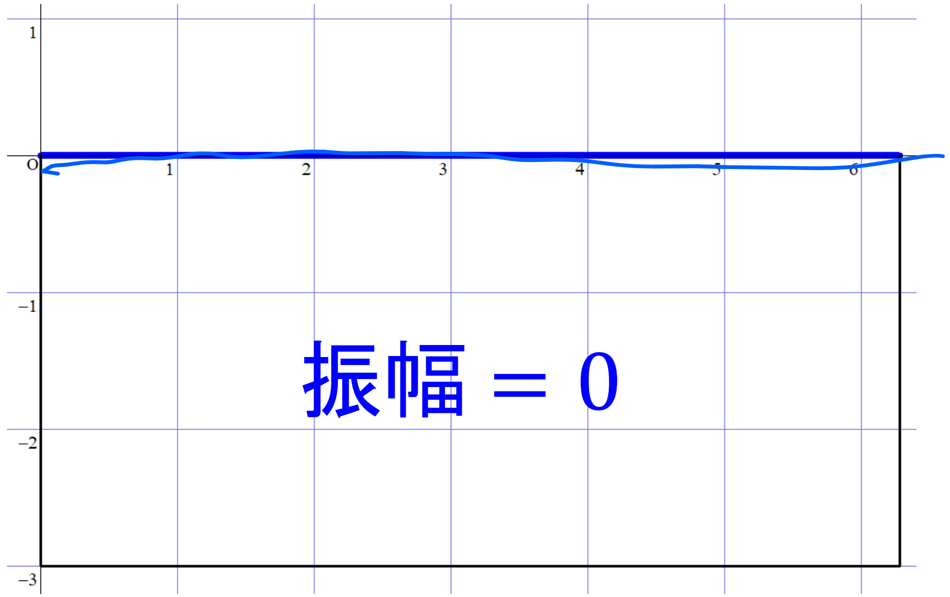
正五角形の頂点を方眼紙に描き、正五角形のメンコを切り出してみよう。

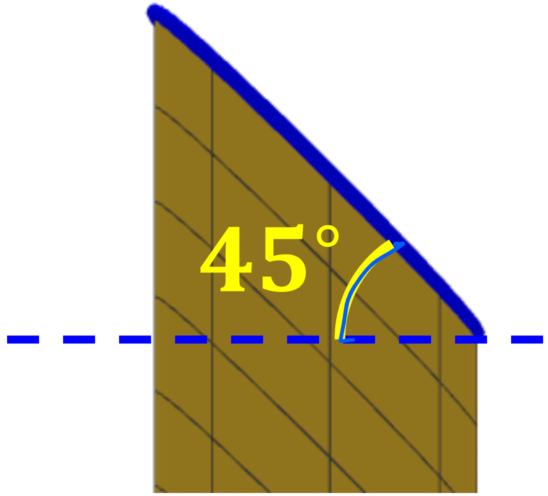


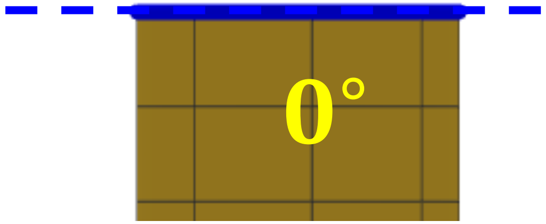
３．円柱で作る正五角形

円柱を切断する角度と三角関数の振幅の関係

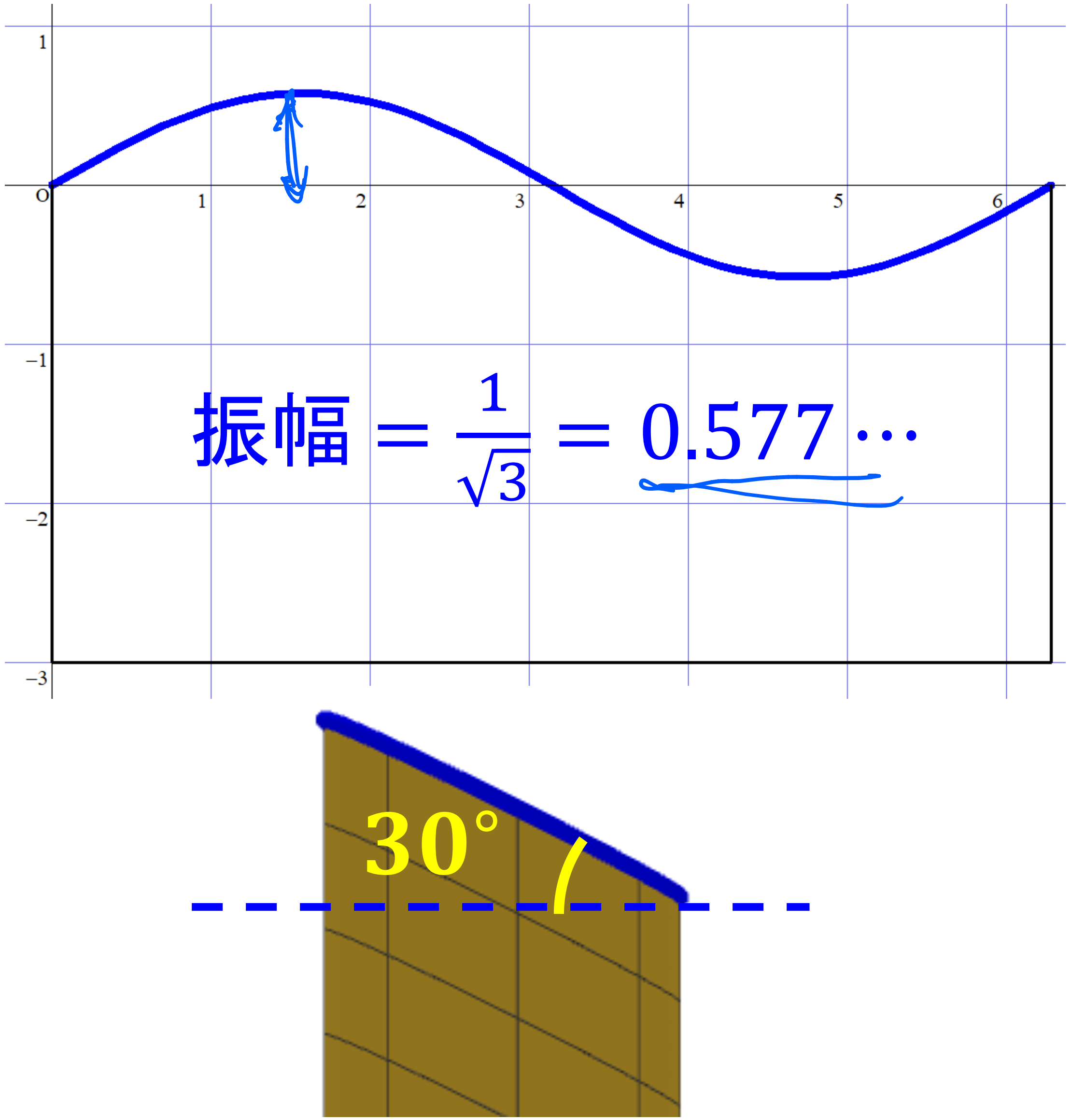




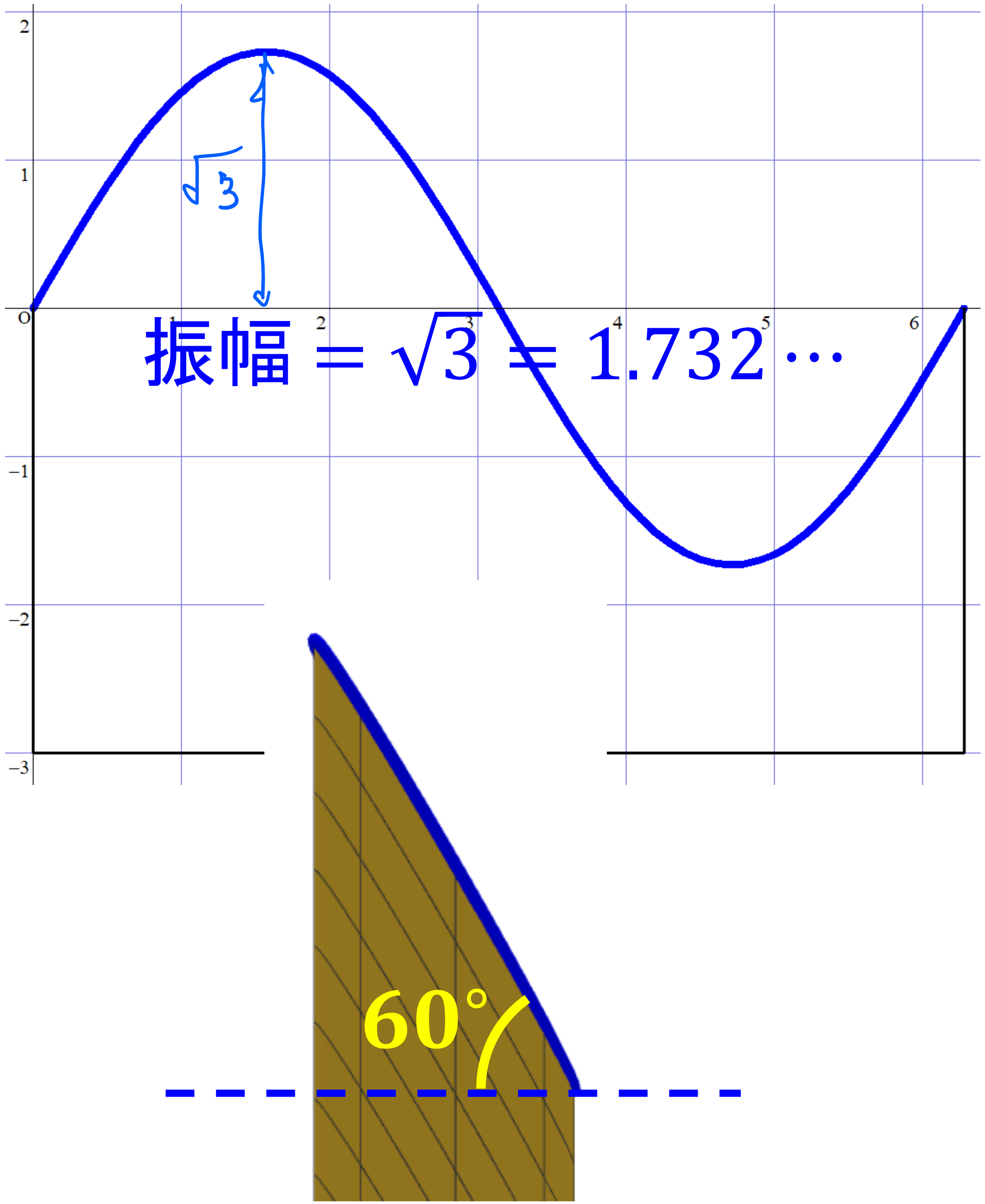




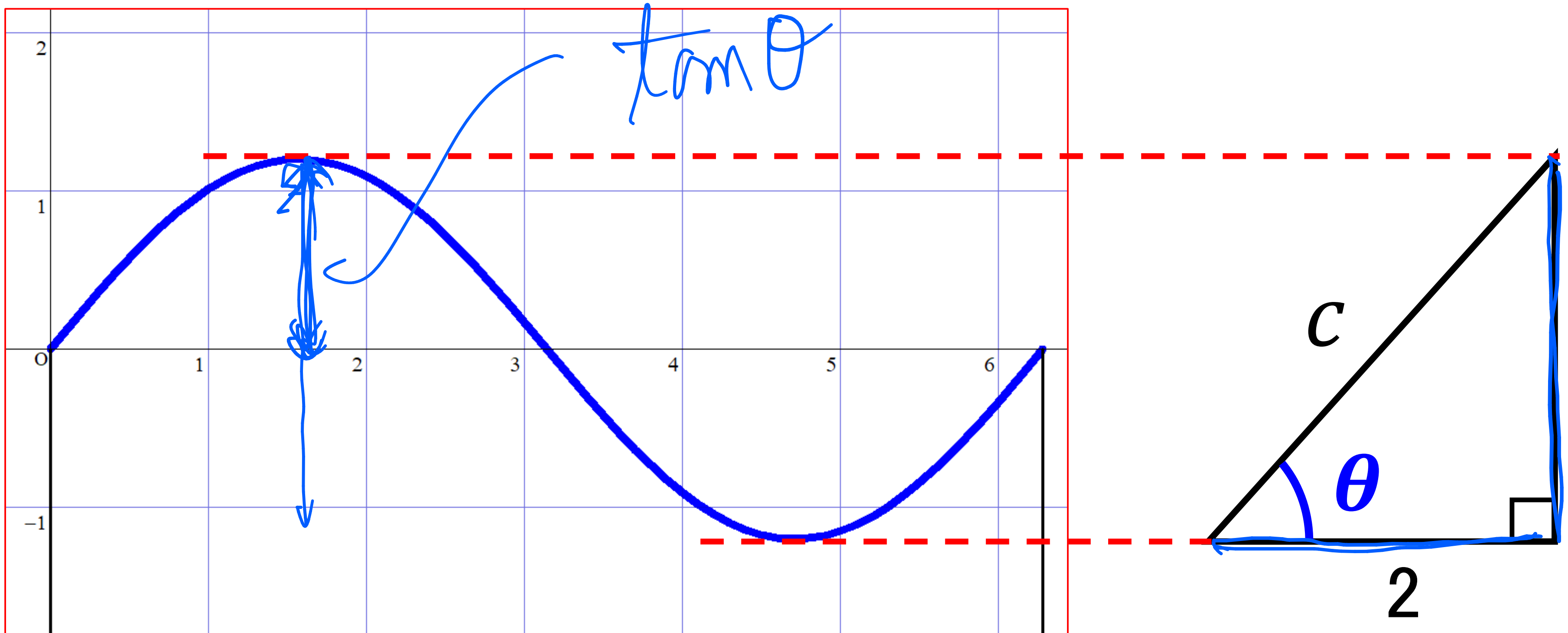
36°



振幅 $= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\cdots$
30°

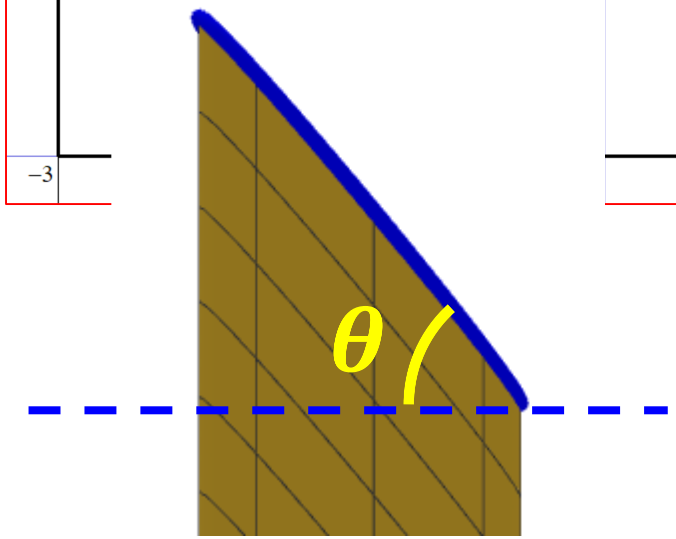


振幅 $= \sqrt{3} = 1.732\cdots$
$\sqrt{3}$
60°



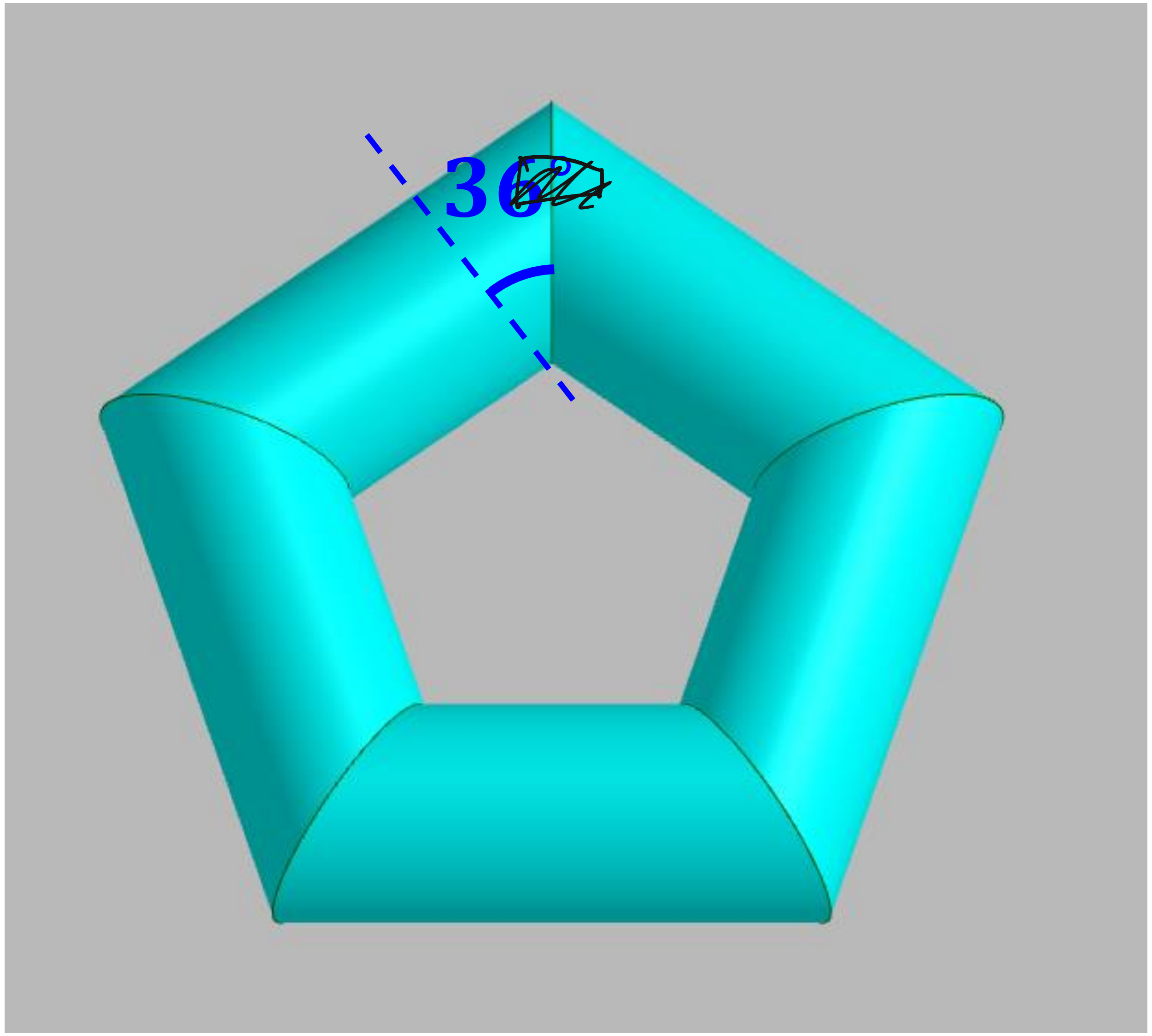
$a = $ 振幅 $\times 2$

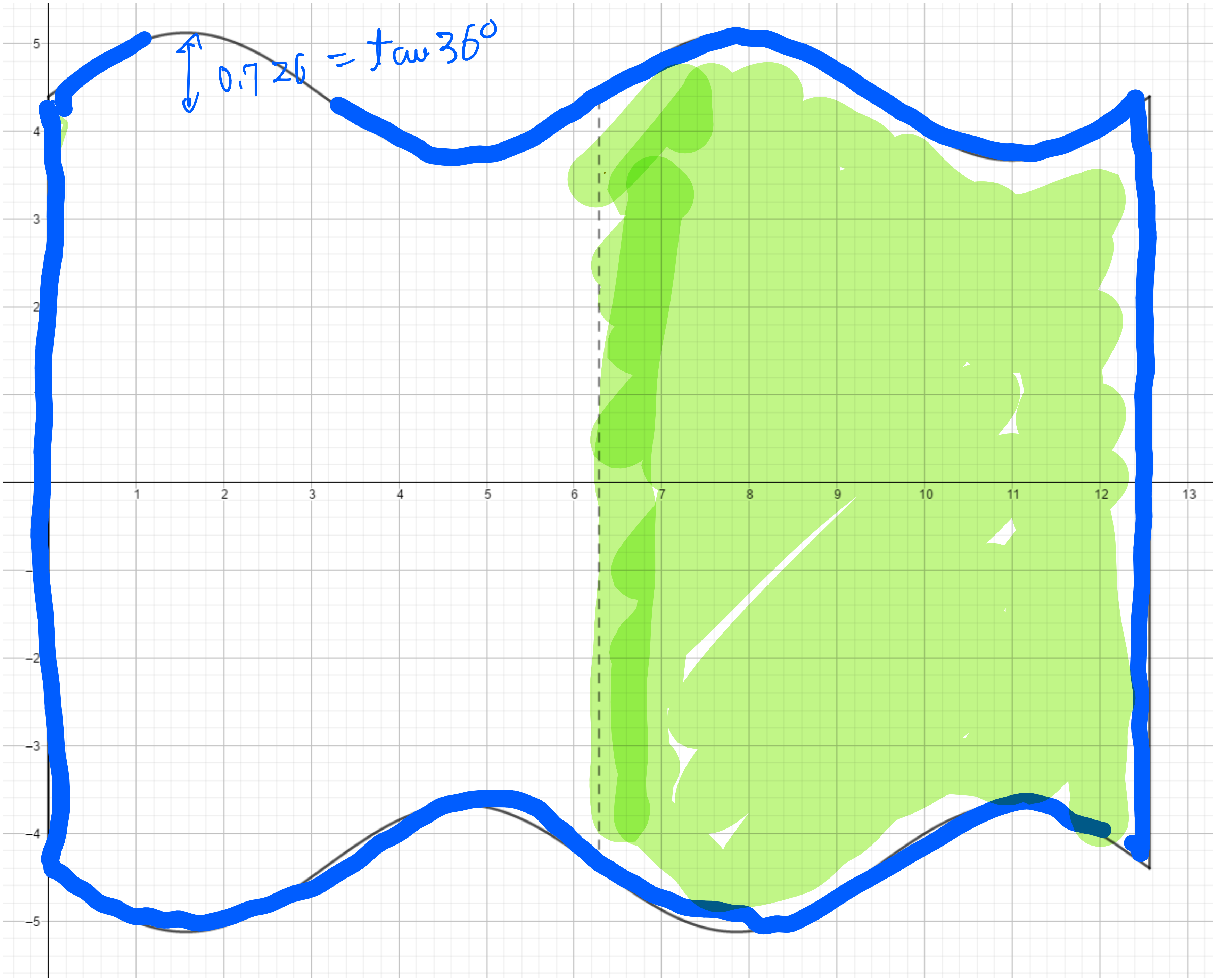
$$\tan\theta = \frac{a}{2} = \text{振幅}$$



$$\theta = 36^\circ \Rightarrow \ \text{振幅} = \tan 36^\circ = 0.726\cdots$$

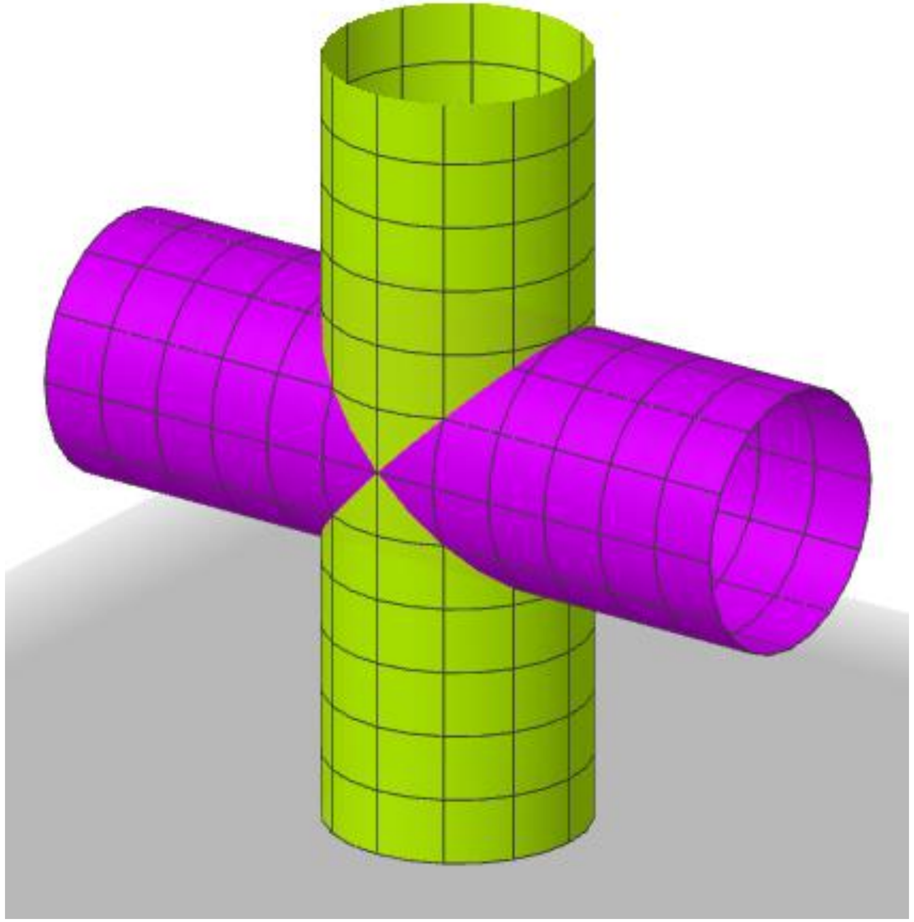
円柱を 36° で切断して正五角形を作ってみよう。



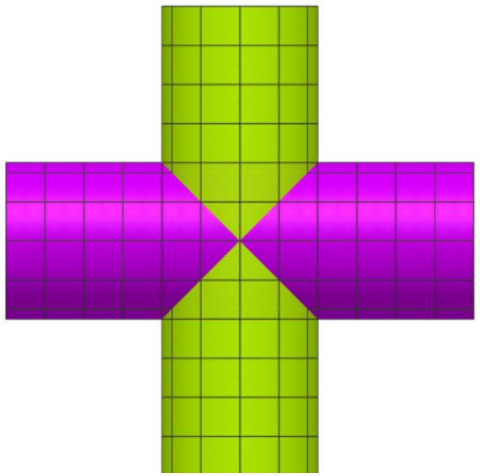

0.726 = tan 36°
5
4
3
2
−2
−3
−4
−5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

4. 交差する円柱の展開図

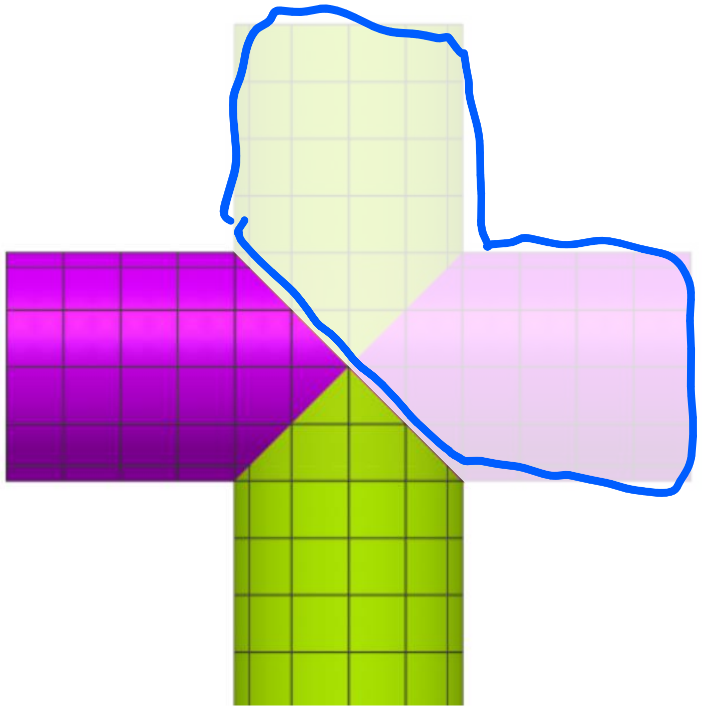
交差する円柱の展開図はどのよう表されるか。

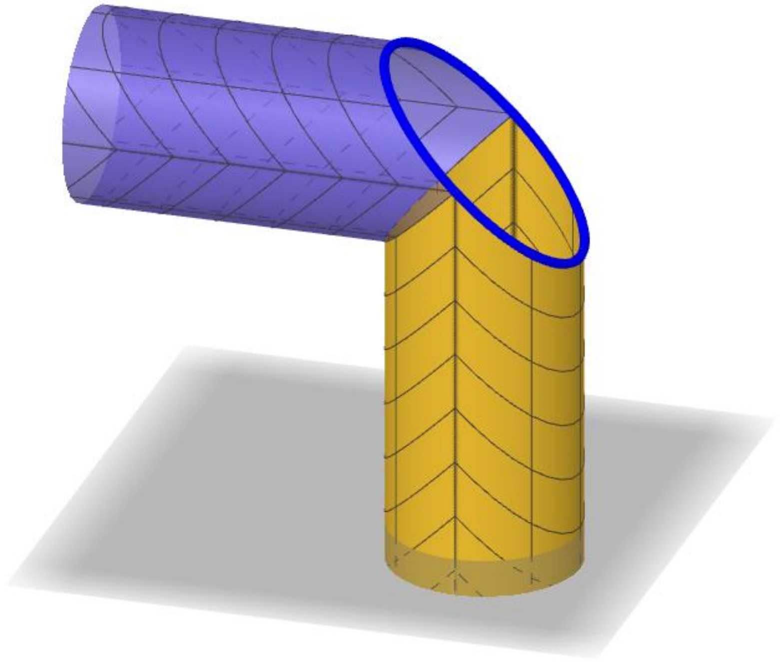


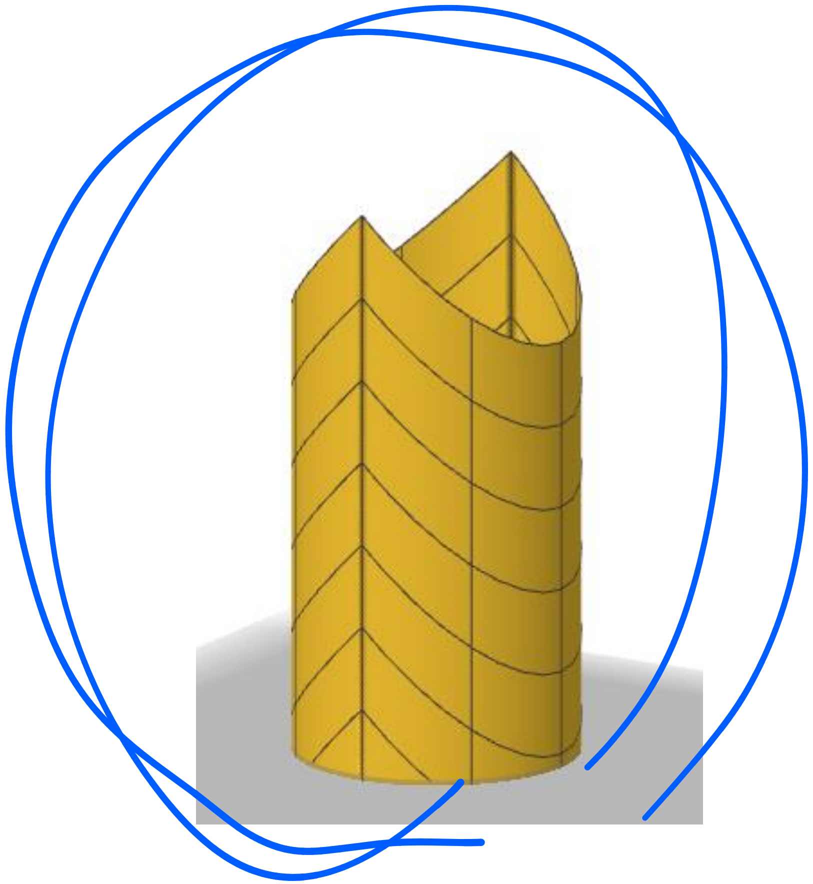
Geogebra 円柱十字



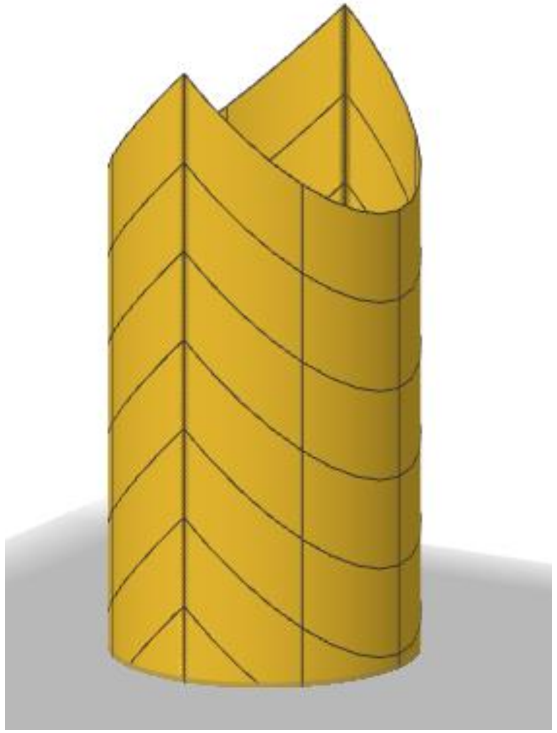
45°で切断した円柱を、
さらに 45° で切断したものになっている。

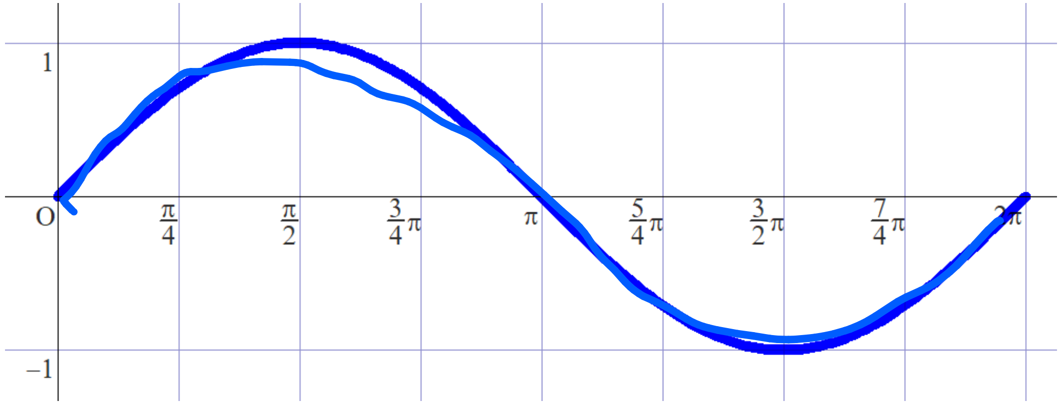




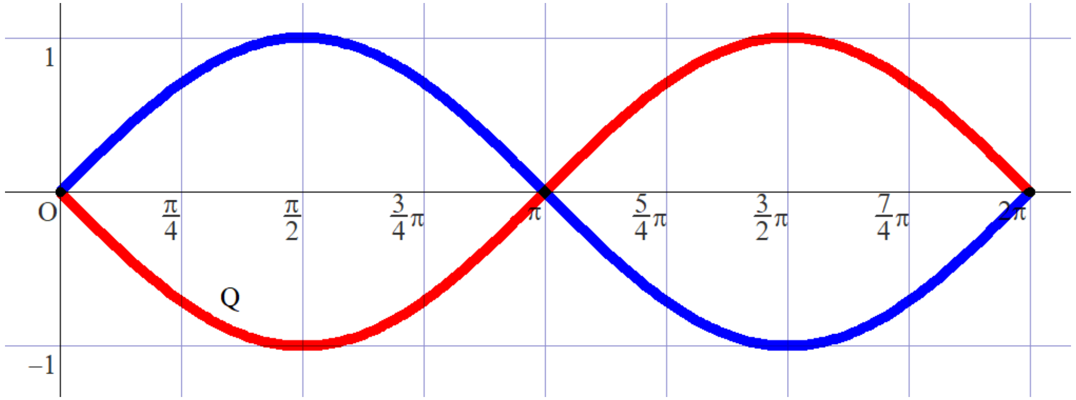


cross−cylinders_cut.ggb

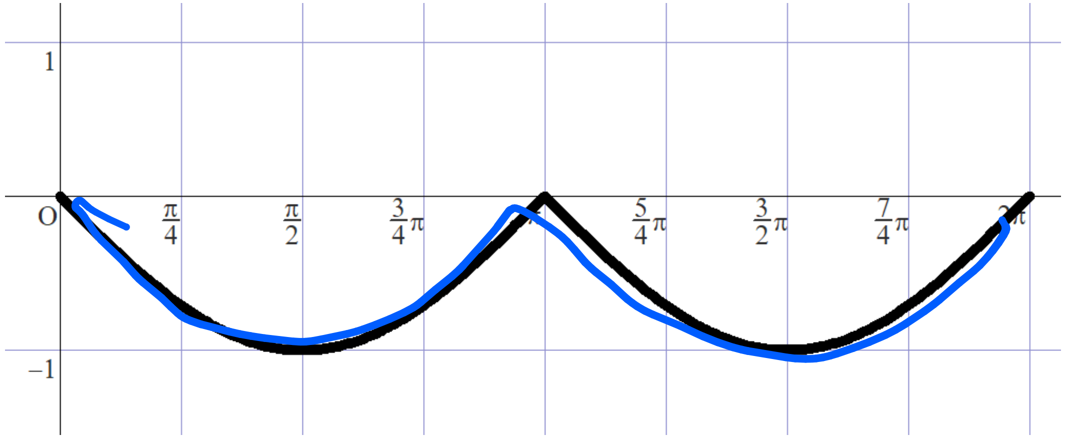




$\sin\theta$

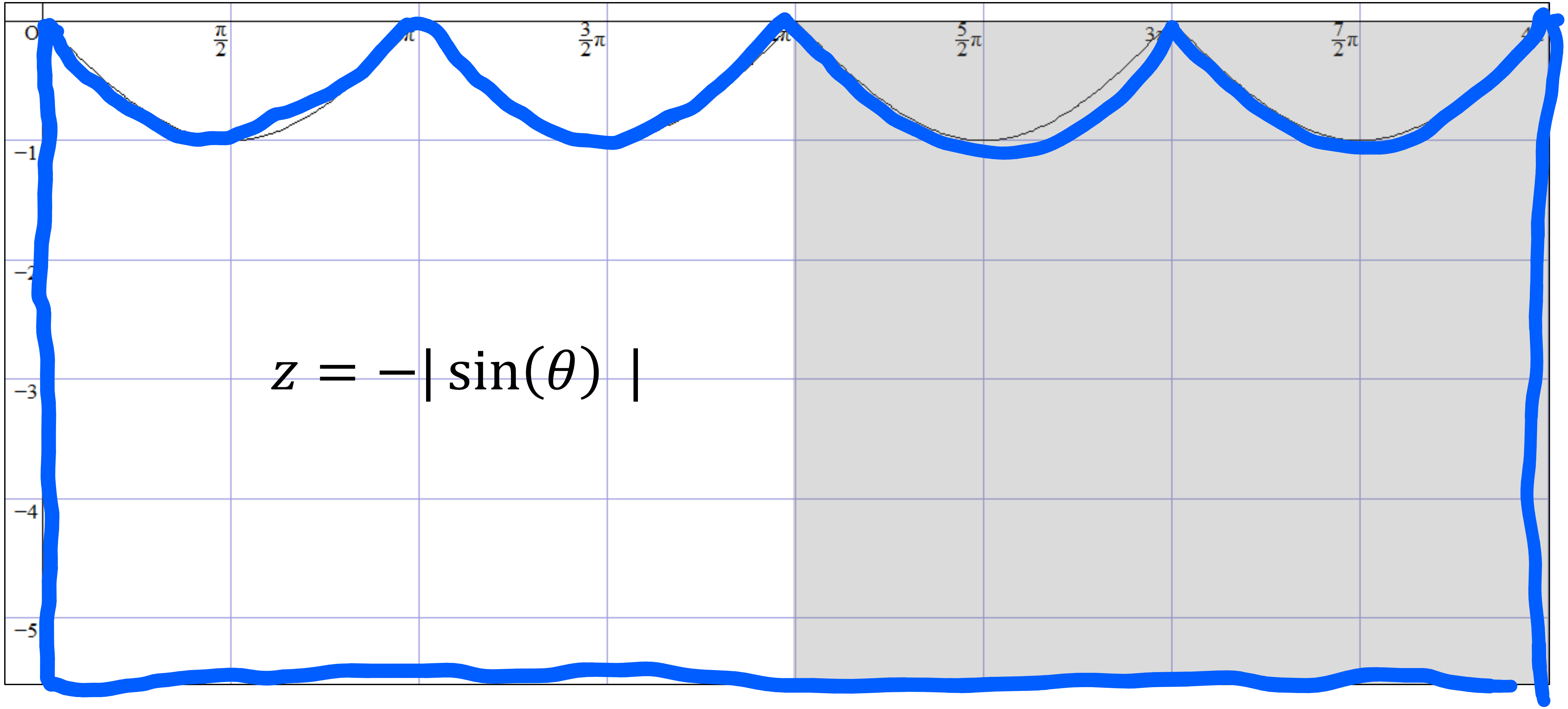


$-\sin\theta$

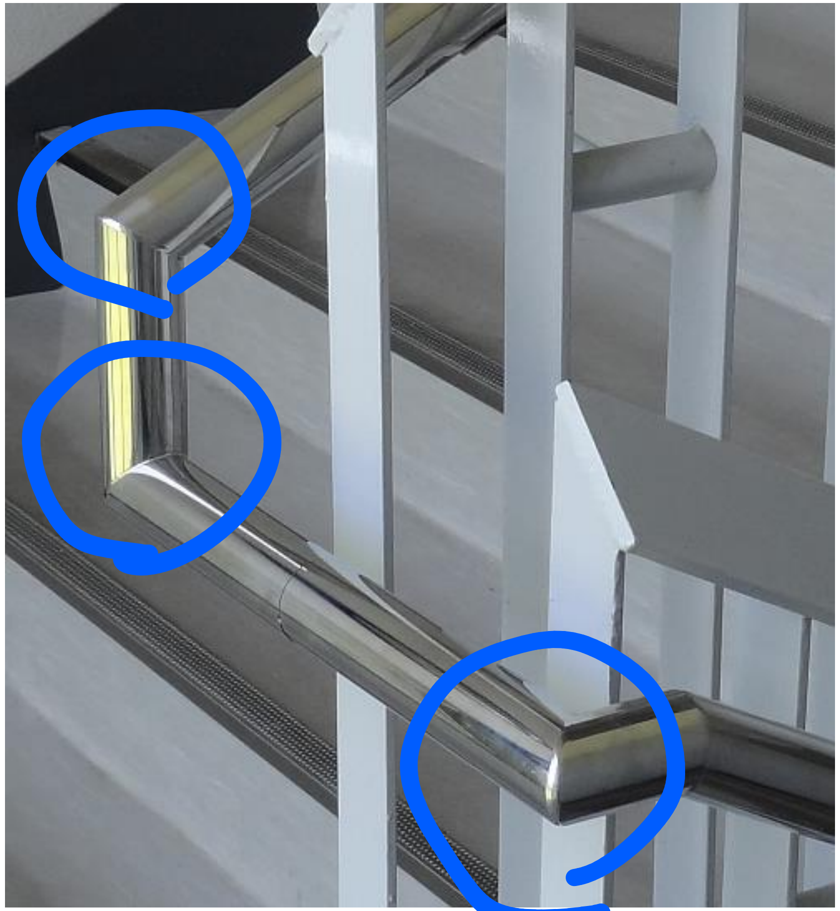


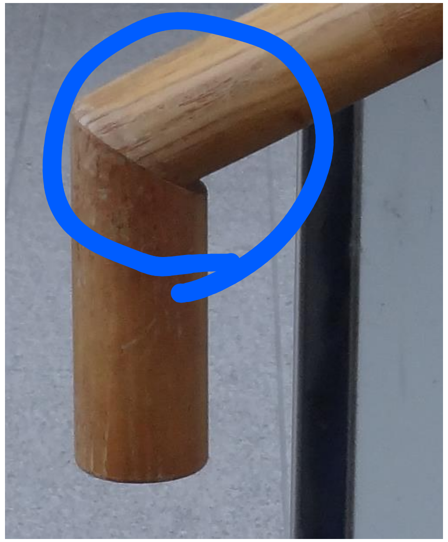
$-|\sin\theta|$

実際に作って確認してみよう。

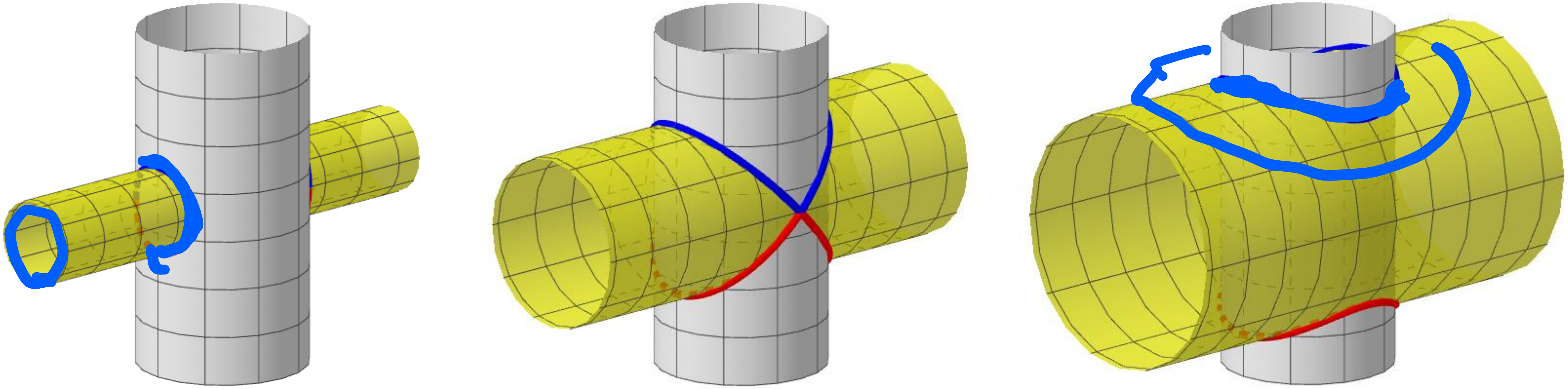


身の回りにある交差する円柱

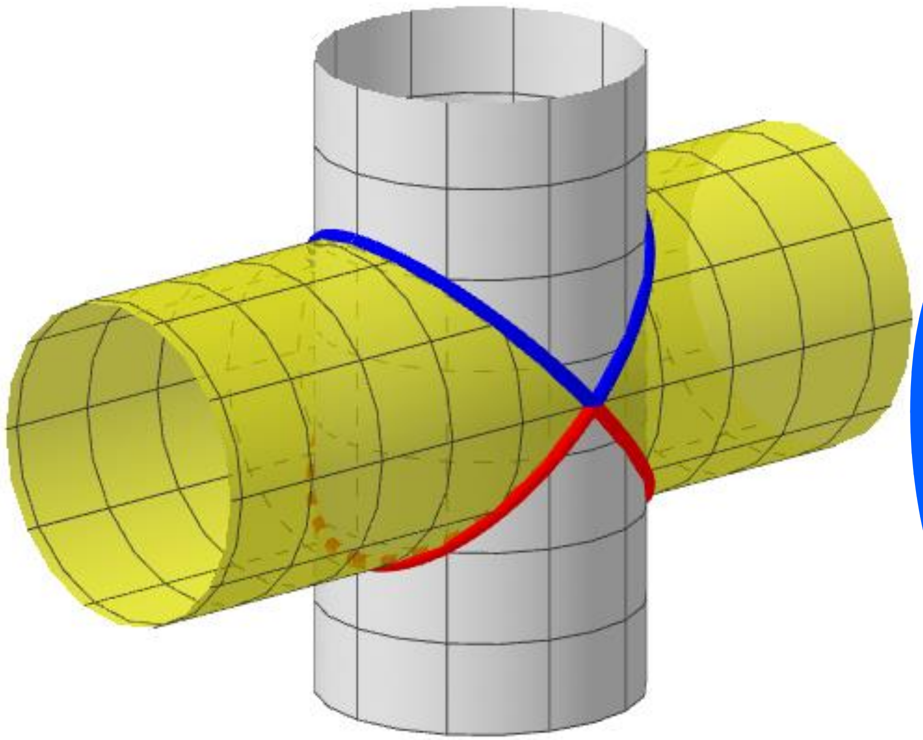


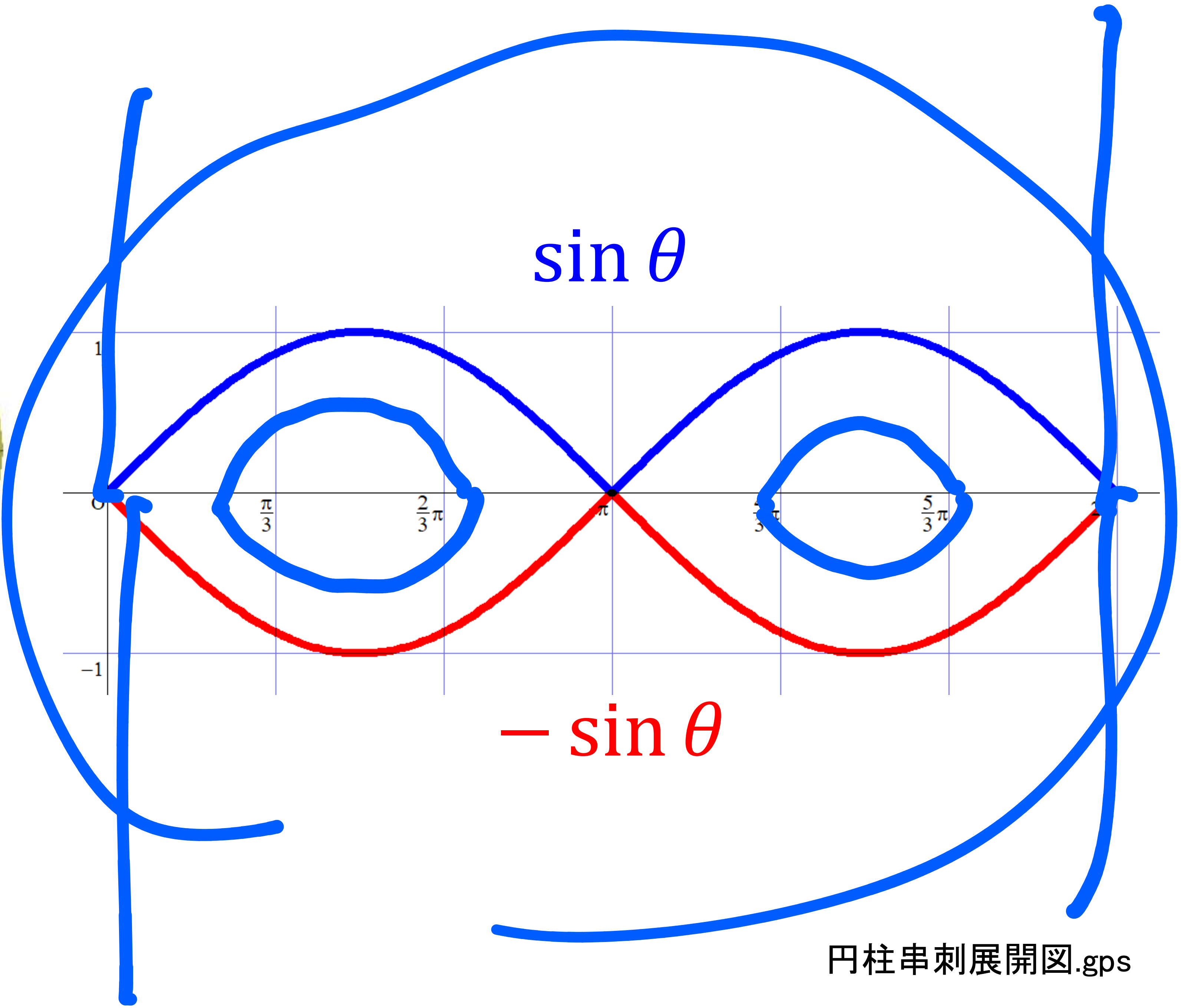


太さが異なる円柱が交差するとき、突き刺された円柱の穴の形はどのようになるか。



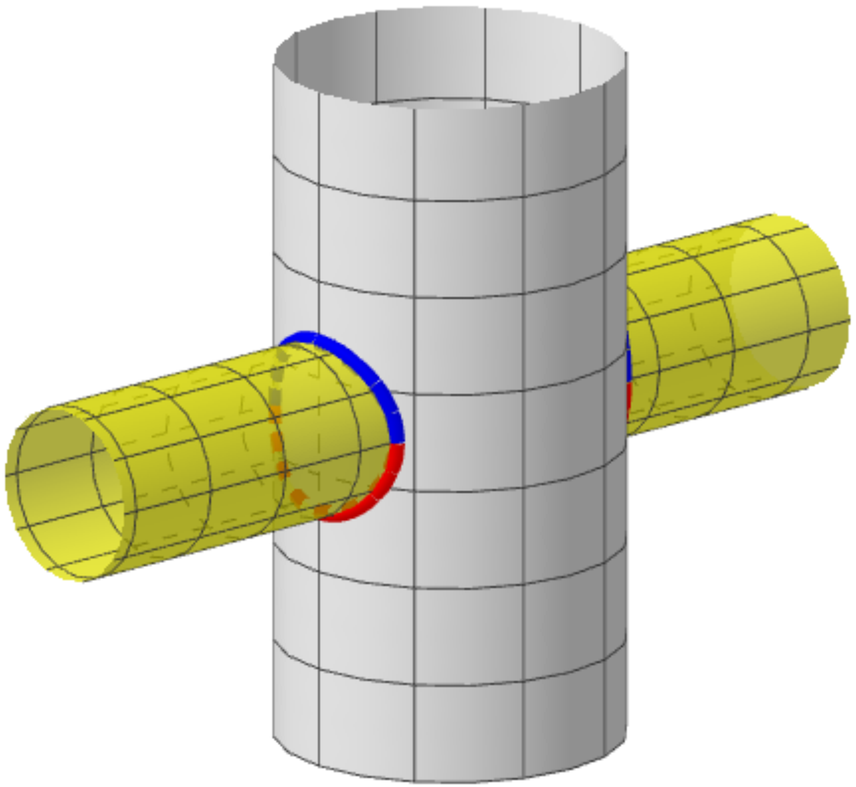
cross−cylinders_r.ggb





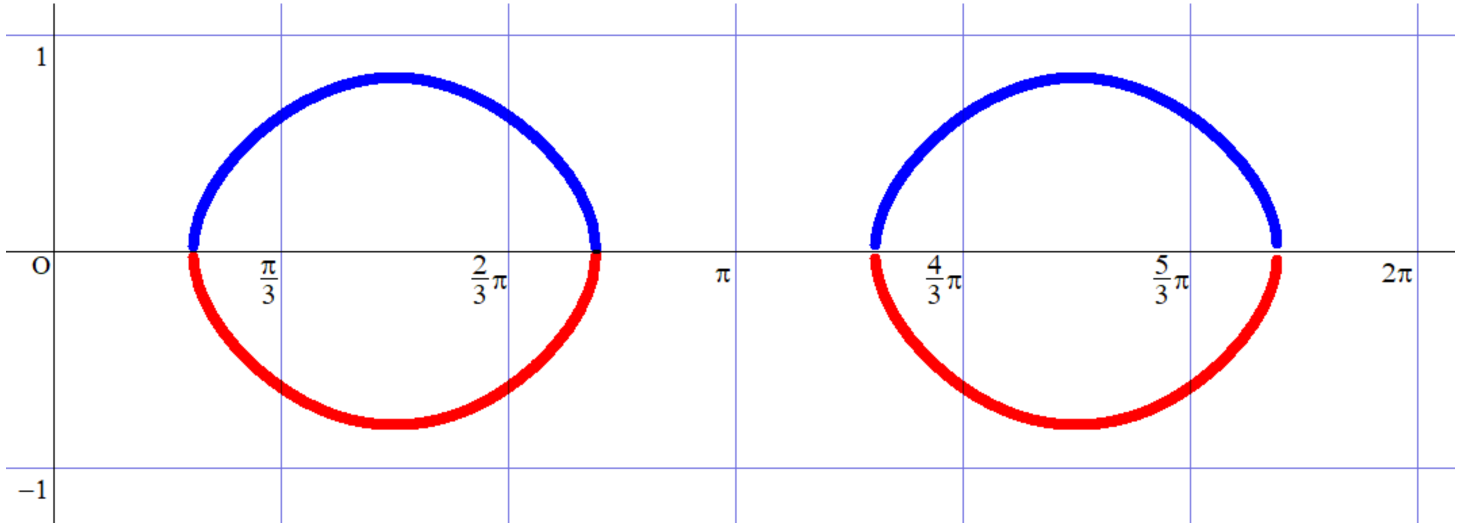
円柱串刺展開図.gps

r : 黄色い円柱の半径



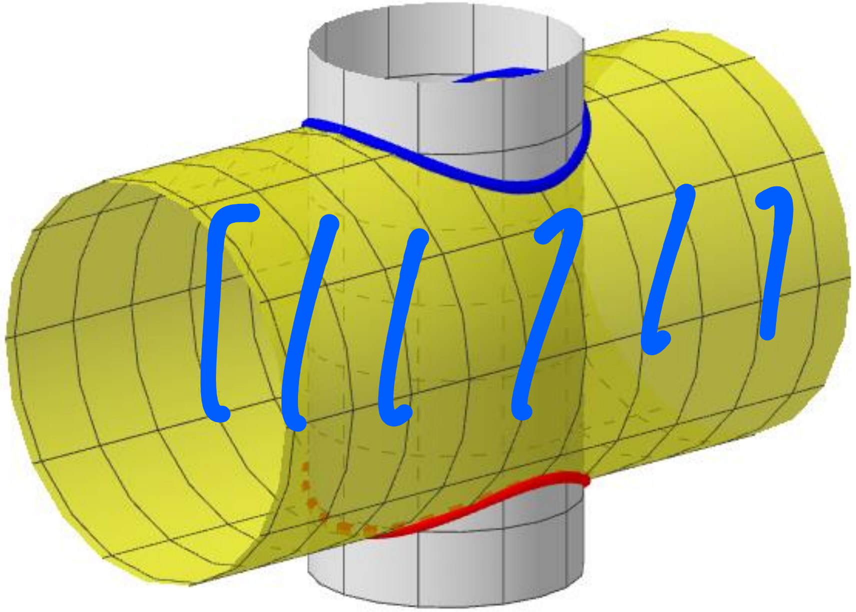
$r < 1$

$$\sqrt{r^2 - (\cos\theta)^2}$$

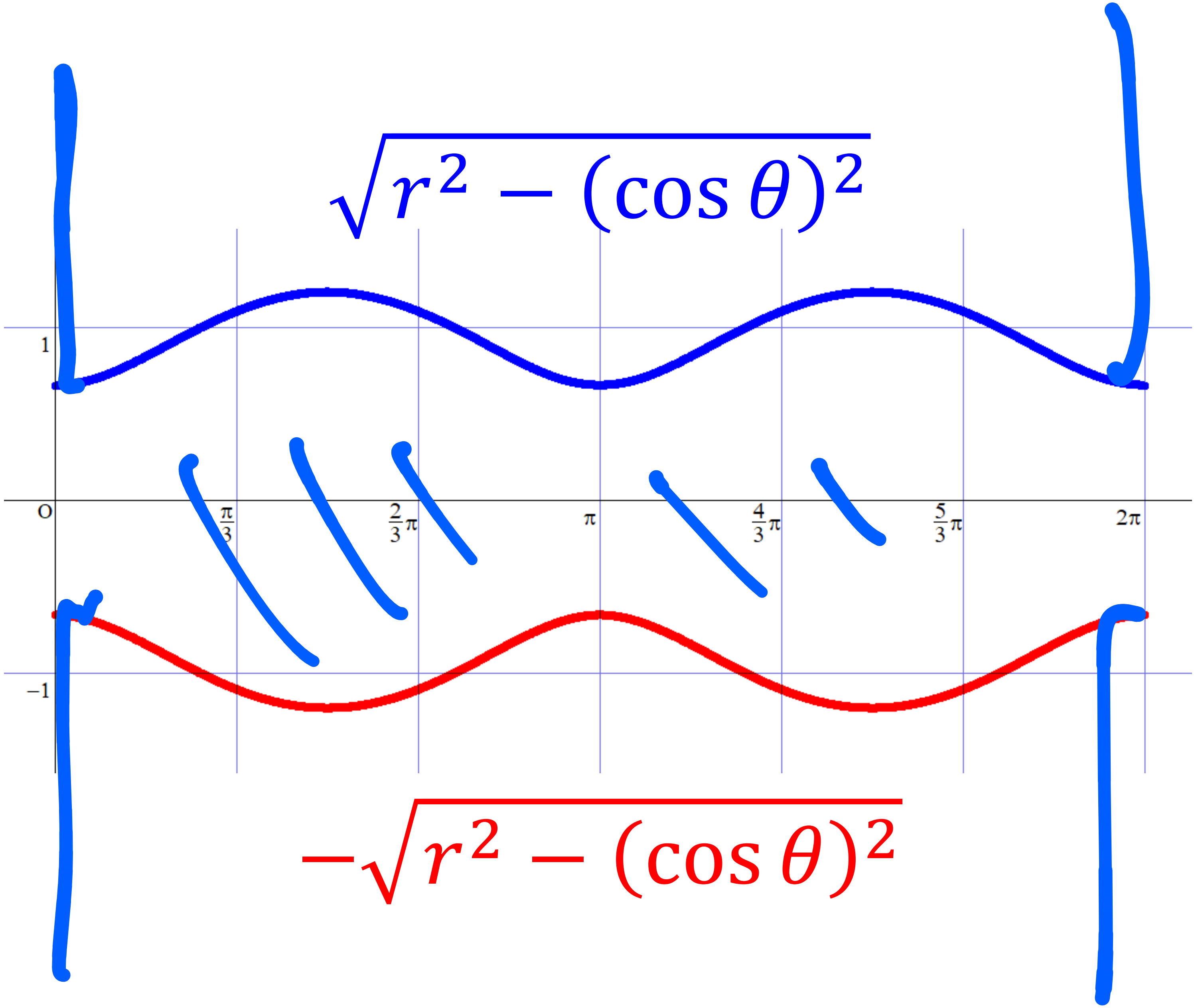


$$-\sqrt{r^2 - (\cos\theta)^2}$$

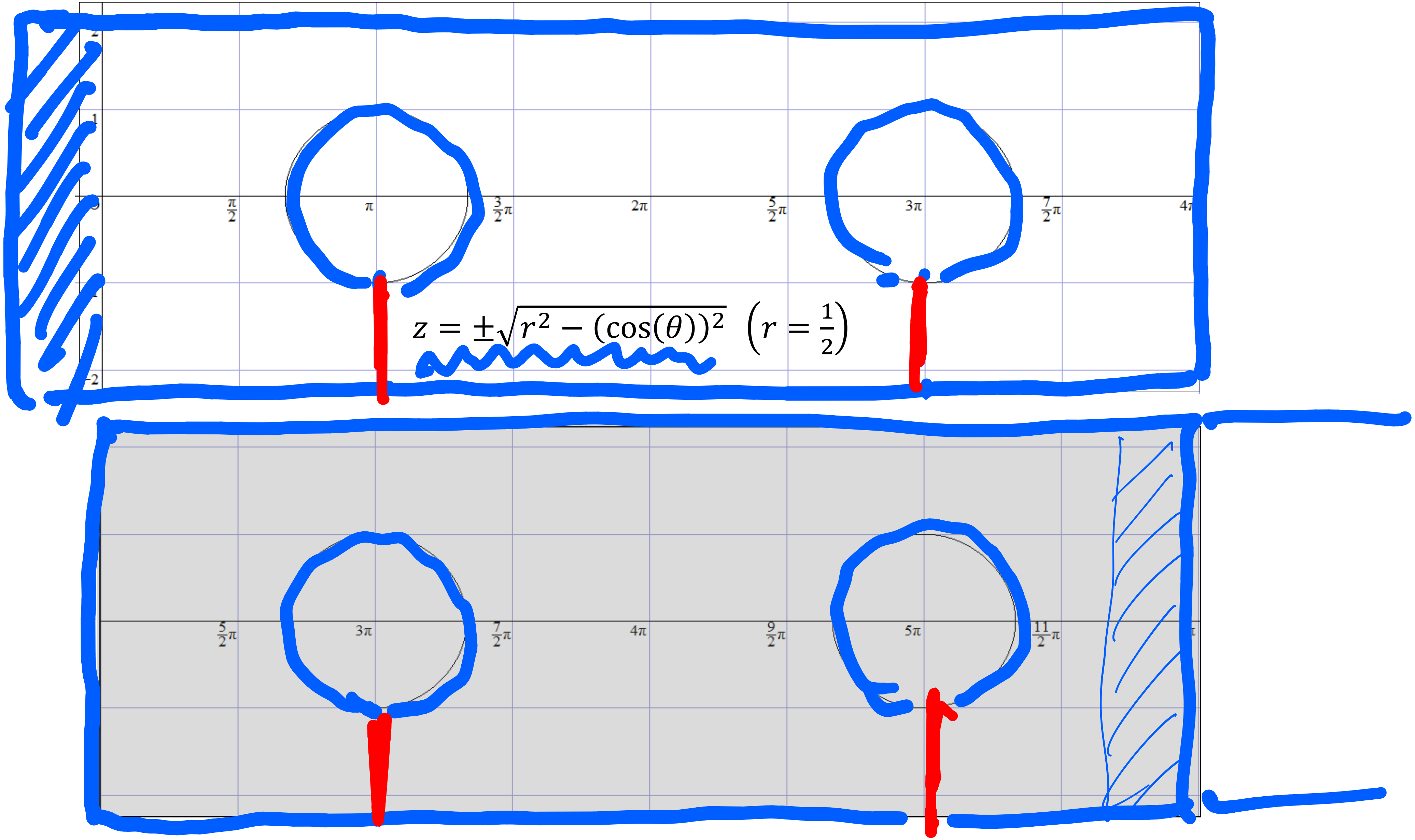
r : 黄色い円柱の半径



$r > 1$



本当に串刺しになっているのか実際に作って確認してみよう。



数式の解説（高校生以上向け）

- 半径1の円柱の表面（曲面）を表す方程式：

$$(x, y, z) = \boxed{(\cos(\theta), \sin(\theta), z)} \quad \cdots (1) ✓$$

- (1) と直交する半径 r の円柱の曲面を表す方程式：

$$\boxed{x^2 + z^2 = r^2} \quad \cdots (2) ✓$$

- (1) と (2) から z を θ の式で表すと

$$\boxed{(\cos(\theta))^2 + z^2 = r^2} \Leftrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{r^2 - (\cos(\theta))^2}}$$

おまけ（紙工作いろいろ）